

Симметрии многоугольников и многогранников

▷ Напомним, что группа изометрий фигуры состоит из всех ее биекций на себя, сохраняющих расстояния между точками.

Задача 1.1. Сколько элементов в группе изометрий а) квадрата; б) правильного n -угольника? Коммутативны ли эти группы?

▷ Группа остатков по модулю n (с операцией сложения) обозначается далее \mathbb{Z}/n .

Задача 1.2. Предъявите фигуру, группа изометрий которой изоморфна а) $\mathbb{Z}/2$; б) $\mathbb{Z}/3$; в) $\mathbb{Z}/4$.

Задача 1.3. Найдите композицию отражений относительно двух данных прямых на плоскости.

Задача 1.4. Существует ли фигура на плоскости, группа изометрий которой изоморфна а) $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$; б) $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$?

Задача 1.5. Постройте нетривиальный гомоморфизм из группы вращений тетраэдра в группу перестановок 4 элементов. Является ли он изоморфизмом?

Задача 1.6. Постройте нетривиальный гомоморфизм из группы изометрий куба в группу перестановок 4 элементов. Является ли он изоморфизмом?

Задача 1.7. Какое минимальное число отражений порождают всю группу изометрий а) (правильного) тетраэдра; б) куба?

Задача 1.8. Докажите, что группы изометрий куба и (правильного) октаэдра изоморфны.

Задача 1.9*. Является ли геометрия (тетраэдр; вращения тетраэдра) подгеометрией геометрии (додекаэдр; вращения додекаэдра)?