# Образующие и соотношения

▷ Напомним, что подгруппа $H$ группы $G$ называется *нормальной*, если вместе с каждым элементом $h$ она содержит все *сопряженные* ему: $h \in H \Rightarrow \forall g \in G\ ghg^{-1} \in H$.
*Ядро* гомоморфизма (прообраз нейтрального элемента) всегда является нормальной подгруппой; и наоборот: любая нормальная подгруппа — ядро некоторого гомоморфизма (а именно, проекции $G \mapsto G/H$)

**Задача 2.1.** Опишите все нормальные подгруппы и соответствующие факторгруппы группы изометрий равностороннего треугольника.

**Задача 2.2.** Опишите в группе изометрий правильного тетраэдра
а) все классы сопряженности;
б) все нормальные подгруппы и соответствующие факторгруппы.

▷ Напомним (см., например, листок 2 по алгебре), что группа перестановок $\mathfrak{S}_n$ порождена а) всеми транспозициями вида $(i\ i+1)$; б) транспозицией $(1\,2)$ и длинным циклом.

**Задача 2.3.** Задайте группу изометрий а) правильного треугольника; б) правильного четырехугольника; в) правильного тетраэдра образующими и соотношениями.

**Задача 2.4.** Пусть $r$, $s$ и $t$ — отражения относительно плоскостей, ортогональных векторам $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ и $(0,1,1)$ соответственно.
а) Найдите композиции $rs$, $st$, $rt$. Каковы порядки этих преобразований?
б) Сколько элементов в группе, порожденной отражениями $r$, $s$ и $t$?

**Задача 2.5.** Задайте группу изометрий куба образующими и соотношениями.

**Задача 2.6.** Покажите, что если в некоторой группе элементы $a$ и $b$ удовлетворяют соотношениям $a^5 = b^3 = 1$ и $b^{-1}ab = a^2$, то $a = 1$.

**Задача 2.7.** Докажите, что свободная группа с 3 образующими не содержит подгруппы, изоморфной $\mathbb{Z}/2$.

**Задача 2.8.** Постройте нетривиальный гомоморфизм из группы вращений додекаэдра в группу перестановок 5 элементов. Найдите его образ.

**Задача 2.9*.** Найдите в $\mathfrak{S}_6$ подгруппу, изоморфную $\mathfrak{S}_5$, отличную от подгруппы всех перестановок, сохраняющих некоторый элемент. Убедитесь, что действие $\mathfrak{S}_6$ сопряжениями на 6 таких подгруппах задает автоморфизм $\mathfrak{S}_6$, не являющийся внутренним (при $n \neq 6$ таких автоморфизмов у $\mathfrak{S}_n$ не бывает).