Сферическая геометрия

▷ Напомним, что *точки* в сферической геометрии — это точки евклидовой сферы в трехмерном пространстве радиуса R; *прямые — большие окружности* (сечения сферы плоскостями, проходящими через ее центр); *расстояние* между двумя точками — евклидова длина меньшей из дуг большой окружности, соединяющей эти точки.

Задача 6.1. Докажите, что биссектрисы сферического треугольника пересекаются в одной точке.

Задача 6.2. Докажите, что медианы сферического треугольника пересекаются в одной точке.

Задача 6.3*. Докажите, что высоты сферического треугольника пересекаются в одной точке. (Тут есть нюанс — какой?)

Один из способов — вглядываться в тождество Якоби для векторного произведения,

$$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0,$$

пока не станет ясно, как слагаемые связаны с высотами треугольника ABC, а равенство суммы нулю — с утверждением задачи.

Задача 6.4. а) Чему в сферической геометрии равна длина $l(r)$ окружности радиуса r? Больше она или меньше, чем в Евклидовой геометрии? Чему равен предел этого выражения при $R \to \infty$?

б) Найдите площадь $s(r)$ сферического круга радиуса r. Больше она или меньше, чем в Евклидовой геометрии?

в) Для точки A на нашей сфере построим еще одну сферу с центром в A. Что больше: площадь сферического круга, высекаемого новой сферой на старой, или площадь Евклидового круга, высекаемого новой сферой на касательной плоскости в точке A?

Задача 6.5. Докажите, что для прямоугольного треугольника с катетами a и b и гипотенузой c выполняется *эллиптическая теорема Пифагора:*

$$s(c) = s(a) + s(b) - \frac{s(a)s(b)}{2\pi R^2}$$

Задача 6.6. На лекции были сформулированы две теоремы косинусов для сферического треугольника (для $R = 1$):

$$\begin{aligned} \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma; \\ \cos \gamma &= -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c. \end{aligned}$$

Объясните, как из любой из них следует другая.

Задача 6.7. Какими правильными многоугольниками можно замостить сферу?