

Дробно-линейные преобразования

▷ Будем отождествлять комплексное число $z = x + yi$ с точкой $Z = (x, y)$ плоскости.

Задача 7.1. а) Убедитесь в том, что преобразование плоскости $z \mapsto az$ ($a \neq 0$) является поворотной гомотетией (т.е. композицией поворота и гомотетии с тем же центром).

б) При каких a и b преобразование плоскости $z \mapsto az + b$ ($a \neq 0$) является поворотной гомотетией? С каким центром? Когда оно является поворотом?

в) Докажите, что композиция поворотных гомотетий и параллельных переносов является либо поворотной гомотетией, либо параллельным переносом. Докажите, что композиция поворотов и параллельных переносов является либо поворотом, либо параллельным переносом.

Задача 7.2. а) Докажите, что точки Z_1, Z_2, Z_3 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда их простое отношение $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ вещественно. Каков геометрический смысл аргумента и модуля простого отношения трех произвольных точек?

б) Докажите, что точки Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 лежат на обобщенной окружности¹ тогда и только тогда, когда их двойное отношение $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$ вещественно.

в) Выведите из предыдущего пункта теорему Птолемея: четырехугольник $ABCD$ вписанный тогда и только тогда, когда произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон, т.е. $AB \cdot CD = AC \cdot BD + BC \cdot AD = 0$.

Задача 7.3. Проверьте, что отображение $z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$ является биекцией $\bar{\mathbb{C}}$ тогда и только тогда, когда $ad - bc \neq 0$.

▷ Такие преобразования называются дробно-линейными. Группа всех дробно-линейных преобразований обозначается $PGL_2(\mathbb{C})$.

Задача 7.4. Какие из дробно-линейных преобразований сохраняют точку ∞ ? Сохраняют ли они простое отношение?

Задача 7.5. Докажите, что группа $PGL_2(\mathbb{C})$ порождена преобразованиями вида $z \mapsto az + b$ и преобразованием $z \mapsto 1/z$.

▷ Напомним, что преобразование $z \mapsto 1/\bar{z}$ является примером инверсии.

Задача 7.6. Докажите, что любая инверсия может быть записана в виде $z \mapsto \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$.

Задача 7.7. Изучите про инверсии и про дробно-линейные преобразования, всегда ли они а) сохраняют двойные отношения; б) переводят обобщенные окружности в обобщенные окружности; в) сохраняют углы между обобщенными окружностями.

Задача 7.8. Докажите, что действие группы $PGL_2(\mathbb{C})$ транзитивно а) на обобщенных окружностях; б) на тройках (различных) точек $\bar{\mathbb{C}}$.

Задача 7.9. а) Какие из дробно-линейных преобразований сохраняют вещественную прямую? б) Опишите все дробно-линейные преобразования, сохраняющие верхнюю полуплоскость. в) Опишите все дробно-линейные преобразования, сохраняющие внутренность единичной окружности. г) Докажите, что две последние группы изоморфны.

¹Т.е. на окружности или на прямой.