Проективные преобразования и модель Кэли–Клейна

▷ Напомним, что двойное отношение $[A,B;X,Y]$ четырех различных точек на одной прямой определяется как $\dfrac{AX}{BX}:\dfrac{AY}{BY}$.

Задача 11.1. Дана четверка прямых, проходящих через одну точку. Докажите, что двойное отношение 4 точек, высекаемых исходными прямыми на еще одной прямой, не зависит от выбора этой вспомогательной прямой.

Задача 11.2. Пусть при проективном преобразовании точки прямой A, B, X, Y перешли в точки с координами λ, 1, 0, ∞. Найдите двойное отношение $[A,B;X,Y]$.

▷ Напомним, что расстояние в модели Кэли–Клейна задется формулой $d(A,B)=\dfrac{1}{2}\big|\ln|[A,B;X,Y]|\big|$, где X и Y — точки пересечения AB с абсолютом.

Задача 11.3. а) Пусть A, B, C, X, Y — точки на одной прямой. Убедитесь в том, что

$$[A,C;X,Y]=[A,B;X,Y]\cdot[B,C;X,Y].$$

б) Выведите из предыдущего пункта, что в модели Кэли–Клейна для трех точек, лежащих на одной прямой, одно из попарных расстояний равно сумме двух других.

▷ В модели Кэли–Клейна геометрии Лобачевского прямые — это (евклидовы) хорды абсолюта. Движения этой модели суть (вещественные) проективные преобразования, сохраняющие абсолют. В центре круга величина гиперболического угла равна величине евклидова угла.

Задача 11.4. Докажите, что проективные преобразования, переводящие абсолют в себя, действительно сохраняют расстояния в модели Кэли–Клейна.

Задача 11.5. Докажите, что гиперболическая окружность в модели Кэли–Клейна является евклидовым эллипсом.

Задача 11.6. Дан круг, его хорда AB и точка X внутри круга. Пусть P — точка пересечения касательных к кругу в точках A и B. Докажите, что PX — гиперболический перпендикуляр к AB (для модели Кэли–Клейна в данном круге).

Задача 11.7. Дан круг и две его пересекающиеся хорды. Постройте одной линейкой прямую, являющуюся гиперболической биссектрисой угла между ними.