ЗАДАЧИ ДЛЯ ДОМАШНЕГО ЭКЗАМЕНА ПО КРУСУ

Теория минимальных подмногообразий-I

Для получения оценки "отлично"достаточно решить **любые 5 задач** *из этого списка. Решения следует направлять на электронный адрес: wowa-medved@mail.ru* **до 22 декабря 23:59. После этого задачи не принимаются!**

1. Докажите *теорему Бонне*: всякая минимальная поверхность вращения в $\mathbb{E}^3$ является либо плоскостью, либо катеноидом.

2. Пусть $\psi\colon \Sigma \to \mathbb{E}^3$ – конформное погружение. Введем изотермические координаты (x, y) и комплексную координату $z = x + iy$. Пусть индуцированная метрика и квадратичный дифференциал Хопфа задаются как

$$g = e^{2\omega} dz d\bar{z},\ \mathcal{H} = q dz^2.$$

Докажите, что уравнение Гаусса (см. Листок 0) переписывается как

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial z \partial \bar{z}} + e^{-2\omega} q\bar{q} + \frac{1}{4} e^{2\omega} H^2 = 0,$$

а уравнение Кодации (см. Листок 0) - как

$$\frac{\partial q}{\partial \bar{z}} = \frac{e^{2\omega}}{4} \frac{\partial H}{\partial z}.$$

Выведите отсюда, что если если погружение имеет постоянную среднюю кривизну, то квадратичный дифференциал Хопфа голоморфен, т.е. q – голоморфная функция.

3. Пусть голоморфная 1-форма ω в представлении Вейерштрасса имеет вид $\omega = f(z)dz$ в локальной комплексной координате z. Докажите, что индуцированная метрика на соответствующей односвязной минимальной поверхности имеет вид $ds^2 = |f|^2(1 + |g|^2)^2 |dz|^2$, а её гауссова кривизна задаётся формулой

$$K = -\left(\frac{2|g'|}{|f|(1 + |g|^2)^2}\right)^2.$$

Выведите отсюда, что всякая плоская минимальная поверхность является плоскостью.

4. Докажите, что вектор единичной нормали к минимальной поверхности в $\mathbb{E}^3$, чьё универсальное накрытые имеет (f, g) данные Вейерштрасса, определяется по формуле:

$$\nu = \frac{1}{|g|^2 + 1}(2 \operatorname{Re} g,\ 2 \operatorname{Im} g,\ |g|^2 - 1).$$

5. Пусть минимальная гиперповерхность $\Sigma \subset \mathbb{E}^{n+1}$ задана графиком функции u над некоторой областью $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Зафиксируем локальный ортонормированный базис $\{e_k\},\ k = \overline{1, n}$ в $\Gamma(T\Sigma)$ и дополним его до базиса в $\mathbb{R}^{n+1}$ с помощью единичного нормального поля e_{n+1} к Σ. Пусть $\omega^1, \ldots, \omega^{n+1}$ – двойственный локальный базис. Рассмотрим форму $\varphi = \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^n$ на Σ и продолжим её на $\Omega \times \mathbb{R}$ так, чтобы полученная форма не зависела от x^{n+1} (здесь $x^1, \ldots, x^{n+1}$ – стандартный базис в $\mathbb{R}^{n+1}$. Докажите, что условие минимальности Σ влечёт, что форма φ замкнута.

6. Докажите, что индекс геликоида бесконечен. Можно ли его разбить ровно на две устойчивые области?

7. Найдите максимальный устойчивый подкатеноид в катеноиде в $\mathbb{E}^3$ симметричный относительно антиподального отображения, т.е. найдите расстояние между основаниями такого катеноида.

8. Докажите, что минимально возможная площадь замкнутой минимальной поверхности в $(\mathbb{S}^3, g_{can})$ равна 4π. Получите оценку снизу на площадь замкнутой минимальной поверхности рода γ в $(\mathbb{S}^3, g_{can})$. Могут ли в $(\mathbb{S}^3, g_{can})$ существовать вполне геодезические торы?