Листок 4
ТЕОРИЯ МИНИМАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ I
ЭЛЕМЕНТЫ КОМПЛЕКСНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

1. Пусть (x, y) – изотермические координаты на поверхности Σ в $\mathbb{E}^3$, а $z = x+iy$ – комплексная координата. Предположим, что в этих координатах метрика имеет вид $g = e^{2\omega}(dx^2+dy^2) = e^{2\omega}dzd\bar{z}$, а вторая квадратичная форма $B = Ldx^2 + 2Mdxdy + Ndy^2$.

а) Покажите, что длину вектора нормали средней кривизны можно найти по формуле

$$H = \frac{e^{-2\omega}}{2}(L + M).$$

б) Докажите, что $(2, 0)$– часть (т.е. часть не содержащая $d\bar{z}$) второй квадратичной формы задаётся формулой

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4}((L - M) - 2iM)dz^2.$$

Полученное выражением называется *квадратичным дифференциалом Хопфа.*

2. Пусть $\psi\colon \Sigma \to \mathbb{E}^3$ – конформное погружение. Введем изотермические координаты (x, y) и комплексную координату $z = x + iy$. Пусть индуцированная метрика и квадратичный дифференциал Хопфа задаются как

$$g = e^{2\omega}dzd\bar{z},\ \mathcal{H} = qdz^2.$$

Докажите, что уравнение Гаусса (см. Листок 0) переписывается как

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial z\partial\bar{z}} + e^{-2\omega}q\bar{q} + \frac{1}{4}e^{2\omega}H^2 = 0,$$

а уравнение Кодации (см. Листок 0) - как

$$\frac{\partial q}{\partial\bar{z}} = \frac{e^{2\omega}}{4}\frac{\partial H}{\partial z}.$$

Выведите отсюда, что если если погружение имеет постоянную среднюю кривизну, то квадратичный дифференциал Хопфа голоморфен, т.е. q – голоморфная функция.