Листок 5
ТЕОРИЯ МИНИМАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ I
ГАУССОВО ОТОБРАЖЕНИЕ, ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЕЙЕРШТРАССА

1. Докажите, что квадрика $\mathbb{Q}_2$ биективна $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$.

2. Пусть голоморфная 1-форма ω в представлении Вейерштрасса имеет вид $\omega = f(z)dz$ в локальной комплексной координате z. Докажите, что индуцированная метрика на соответствующей односвязной минимальной поверхности имеет вид $ds^2 = |f|^2(1+|g|^2)^2|dz|^2$, а её гауссова кривизна задаётся формулой

$$K = -\left(\frac{2|g'|}{|f|(1+|g|^2)^2}\right)^2.$$

Выведите отсюда, что всякая плоская минимальная поверхность является плоскостью.

3. Докажите, что вектор единичной нормали к минимальной поверхности в $\mathbb{E}^3$, чьё универсальное накрытые имеет (f, g) данные Вейерштрасса, определяется по формуле:

$$\nu = \frac{1}{|g|^2+1}(2\operatorname{Re} g,\ 2\operatorname{Im} g,\ |g|^2-1).$$

4. а) Убедитесь, что данные Вейерштрасса катеноида, геликоида и поверхности Эннепера (см. Листок 0) соотвественно $(e^z, e^{-z}), (-ie^z, e^{-z}), (1, z)$. Соответствующая риманова поверхность $\mathbb{C}$.

б) Получите координатную запись поверхности Шерка, чьи данные Вейерштрасса $(\frac{2}{1-z^4}, z)$, а соответствующая риманова поверхность $\mathbb{D}^2$ (открытый единичный диск в $\mathbb{C}$). Покажите, что поверхность Шерка задаётся локально формулой $z = \ln\frac{\cos y}{\cos x}$ в стандартных декартовых координатах (x, y, z).

5. Докажите, что образ гауссова отображения поверхности Шерка не покрывает ровно 4 точки на сфере.