Листок 6
ТЕОРИЯ МИНИМАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ I
КАЛИБРАЦИИ

1. Пусть минимальная гиперповерхность $\Sigma \subset \mathbb{E}^{n+1}$ задана графиком функции u над некоторой областью $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Зафиксируем локальный ортонормированный базис $\{e_k\},\ k = \overline{1,n}$ в $\Gamma(T\Sigma)$ и дополним его до базиса в $\mathbb{R}^{n+1}$ с помощью единичного нормального поля e_{n+1} к Σ. Пусть $\omega^1, \ldots, \omega^{n+1}$ – двойственный локальный базис. Рассмотрим форму $\varphi = \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^n$ на Σ и продолжим её на $\Omega \times \mathbb{R}$ так, чтобы полученная форма не зависела от x^{n+1} (здесь $x^1, \ldots, x^{n+1}$ – стандартный базис в $\mathbb{R}^{n+1}$. Докажите, что условие минимальности Σ влечёт, что форма φ замкнута.

2. Пусть $\xi \in Gr(n, \mathbb{R}^{2n})$ и Π – ориентированная $n-$плоскость, представляемая ξ. Пусть $\{x^1, \ldots x^n, y^1, \ldots, y^n\}$ – стандартный базис в $\mathbb{R}^{2n}$, J – стандартная комплексная структура и $\omega = \sum_{j=1}^n dx^j \wedge dy^j$ – кэлерова форма. Докажите, что следующие условие эквивалентны

(а) $\omega(X, Y) = 0\ \forall X, Y \in \Pi$;

(б) $1-$форма $\sum_{j=1}^n y^j dx^j$ замкнута на Π;

(в) $J(\Pi) = \Pi^\perp$;

(г) $\xi = A(\frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \frac{\partial}{\partial x^2} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial}{\partial x^n})$ для некоторой матрицы $A \in U(n)$;

(д) $|dz(u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_n)| = 1$, где $\{u_1, \ldots, u_n\}$ – ортономированный базис в Π.

3. Пусть дано $\mathbb{E}^{2n}$ со стандартной комплексной структурой.

(а) Докажите, что форма $\varphi = \mathrm{Re}(dz)$ является калибрацией, а все калиброванные многообразия являются в точности специальными лагранжевыми подмногообразиями в $(\mathbb{E}^{2n}, J)$.

(б) Докажите, что форма $\varphi_\theta = \mathrm{Re}(e^{i\theta} dz)$ является калибрацией. Калиброванные этой формой подмногообразия $\mathbb{E}^{2n}$ называются специальными лагранжевыми подмногообразиями с фазой θ.

4. Пусть C – двумерный конус в $\mathbb{R}^{2n}$.

(а) Докажите, что конус C является лагранжевым тогда и только тогда когда его линк является лежандровым.

(б) Докажите, что конус C является минимальным и лагранжевым тогда и только тогда, когда его линк является минимальным и лагранжевым.