

Листок 7

ТЕОРИЯ МИНИМАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ I УСТОЙЧИВОСТЬ, ИНДЕКС И ОБЪЁМЫ МИНИМАЛЬНЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ

1. Пусть (Σ, g) – замкнутая гиперповерхность постоянной средней кривизны в \mathbb{E}^{n+1} , B – её вторая квадратичная форма и ν – поле единичных нормалей к Σ . Докажите, что для всякого фиксированного вектора $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ верно, что

$$\Delta_g \langle a, \nu \rangle_g = |B|_g^2 \langle a, \nu \rangle_g.$$

2. Найдите максимальный устойчивый подкатеноид в катеноиде в \mathbb{E}^3 симметричный относительно антиподального отображения, т.е. найдите расстояние между основаниями такого катеноида.

3. Докажите, что индекс геликоида бесконечен. Можно ли его разбить ровно на две устойчивые области?

4. Докажите, что индекс поверхности Эннепера равен 1.

Указание: Что представляет собой образ поверхности Эннепера при гауссовом отображении?

5. Пусть (M, g) – трёхмерное риманово многообразие кривизны не больше -1. Найдите оценку сверху на площадь минимальной поверхности рода γ в (M, g) . Докажите, что в (M, g) нет минимальных сфер. Могут ли в (M, g) существовать минимальные торы?

6. Докажите, что минимально возможная площадь замкнутой минимальной поверхности в (\mathbb{S}^3, g_{can}) равна 4π . Получите оценку снизу на площадь замкнутой минимальной поверхности рода γ в (\mathbb{S}^3, g_{can}) . Могут ли в (\mathbb{S}^3, g_{can}) существовать вполне геодезические торы?