КОБОРДИЗМЫ И ДЕЙСТВИЯ ТОРА
ЛИСТОК 1: ПОНЯТИЕ БОРДИЗМА, КОНСТРУКЦИЯ ПОНТРЯГИНА–ТОМА, ГОМОТОПИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ БОРДИЗМОВ И КОБОРДИЗМОВ

ЛЕКТОР: Т. Е. ПАНОВ

1. Пусть Ω_O^n обозначает группу (неориентированных) бордизмов замкнутых гладких n-мерных многообразий. Докажите, что $\Omega_O^0 \cong \mathbb{Z}_2$ и $\Omega_O^1 \cong 0$.

2. Докажите, что $\mathbb{R}P^2$ не является границей никакого 3-мерного многообразия. Выведите отсюда, что $\Omega_O^2 \cong \mathbb{Z}_2$.

3. Пусть ξ и η — векторные расслоения над пространствами X и Y, соответственно, и пусть $\xi \times \eta$ — расслоение-произведение над $X \times Y$. Докажите гомеоморфизм пространств Тома

$$Th(\xi \times \eta) \cong Th\,\xi \wedge Th\,\eta.$$

4. Пусть η — тавтологическое одномерное вещественное (соответственно, комплексное) векторное расслоение над $\mathbb{R}P^n$ (соответственно, над $\mathbb{C}P^n$). Докажите, что пространство Тома $Th\,\eta$ гомеоморфно $\mathbb{R}P^{n+1}$ (соответственно, $\mathbb{C}P^{n+1}$).

5. Докажите, что кобордизм η-подмногообразий в $E\xi$ является отношением эквивалентности.

6. Докажите, что множество классов кобордизма η-подмногообразий в $E\xi$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством $[Th\,\xi, Th\,\eta]$ классов гомотопии отображений пространств Тома, сохраняющих отмеченную точку.

7. Докажите, что в геометрическом определении групп кобордизмов $O^n(X)$ гладкого многообразия X вместо композиции

$$M \hookrightarrow X \times \mathbb{R}^{n-k} \longrightarrow X$$

можно рассматривать композицию

$$M \hookrightarrow E\xi \longrightarrow X,$$

где ξ есть произвольное $(k-n)$-мерное векторное расслоение над X, а $M \hookrightarrow E\xi$ — вложение подмногообразия коразмерности k.

8. Для замкнутого гладкого n-мерного многообразия X докажите изоморфизмы *двойственности Пуанкаре–Атья*

$$O^{n-k}(X) \cong O_k(X) \quad \text{для любого } k.$$

9. Пусть задано комплексное $(k-l)$-мерное векторное расслоение ξ над гладким многообразием X и вложение $M \hookrightarrow E\xi$, в нормальном расслоении которого введена структура комплексного k-мерного расслоения. Докажите, что композиция

$$M \hookrightarrow E\xi \longrightarrow X$$

Date: 27 сентября 2021 г.

задаёт комплексную ориентацию отображения $M \to X$ коразмерности $2l$ и тем самым класс комплекнсых кобордизмов в $U^{2l}(X)$.

Аналогично, вложение $M \hookrightarrow E(\xi \oplus \underline{\mathbb{R}})$, в нормальном расслоении которого введена структура комплексного k-мерного расслоения, задаёт класс комплексных кобордизмов в $U^{2l-1}(X)$ при помощи композиции

$$M \hookrightarrow E(\xi \oplus \underline{\mathbb{R}}) \longrightarrow X.$$

10. Пусть $\pi\colon E \to B$ — расслоение гладких многообразий со слоем F. Докажите, что комплексная ориентация отображения π эквивалентна выбору стабильно комплексной структуры в касательном расслоении $\mathcal{T}_F(E)$ вдоль слоёв расслоения π.

Список литературы

[1] Buchstaber, Victor M.; Panov, Taras E. Toric Topology. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 204, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015 (Appendix D).

[2] Stong, Robert. Notes on Cobordism Theory. Math. Notes, vol. 7. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1968. [Русский перевод: Стонг Р., Заметки по теории кобордизмов, «Мир», Москва, 1973.]