КОБОРДИЗМЫ И ДЕЙСТВИЯ ТОРА
ЛИСТОК 3: ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ И ЧИСЛА

ЛЕКТОР: Т.Е. ПАНОВ

1. Вычислите полный характеристический класс Чженя касательного расслоения многообразия $\mathbb{C}P^n$.

2.

а) Вычислите кольцо когомологий многообразия $L(n,m) = \mathbb{C}P(\eta \oplus \underline{\mathbb{C}}^m)$, где η — тавтологическое одномерное расслоение над $\mathbb{C}P^n$, а $\underline{\mathbb{C}}^m$ — тривиальное m-мерное расслоение над $\mathbb{C}P^n$.

б) Вычислите кольцо когомологий многообразия $\mathbb{C}P(\eta^{\otimes i_1} \oplus \ldots \oplus \eta^{\otimes i_k})$ для произвольных целых чисел $i_1, \ldots, i_k$.

в)* Вычислите полный характеристический класс Чженя касательного расслоения многообразия $\mathbb{C}P(\eta^{\otimes i_1} \oplus \ldots \oplus \eta^{\otimes i_k})$.

3. Пусть η — тавтологическое расслоение над $\mathbb{C}P^\infty$. Докажите, что не существует комплексного векторного расслоения ζ над $\mathbb{C}P^\infty$ такого, что $\eta \oplus \zeta$ тривиально.

4. Для каждого разбиения $\omega = (i_1, \ldots, k_k)$ числа $n = i_1 + \ldots + i_k$ определим *число Штифеля–Уитни* компактного многообразия M^n:

$$w_\omega[M^n] = \langle w_{i_1} \cdots w_{i_k}(\mathcal{T}M), [M^n] \rangle \in \mathbb{Z}_2,$$

число Чженя компактного комплексного многообразия M^{2n}:

$$c_\omega[M^{2n}] = \langle c_{i_1} \cdots c_{i_k}(\mathcal{T}M), [M^{2n}] \rangle \in \mathbb{Z}$$

и *число Понтрягина* компактного ориентированного многообразия M^{4n}:

$$p_\omega[M^{4n}] = \langle p_{i_1} \cdots p_{i_k}(\mathcal{T}M), [M^{4n}] \rangle \in \mathbb{Z}.$$

Вычислите все числа Штифеля–Уитни пространства $\mathbb{R}P^n$, числа Чженя и Понтрягина пространства $\mathbb{C}P^n$.

5. Докажите, что если M^n является границей компактного многообразия W^{n+1}, то $w_\omega[M^n] = 0$ для любого разбиения ω. Аналогично, если M^{4n} является границей ориентированного компактного многообразия W^{4n+1}, то $p_\omega[M^{4n}] = 0$ для любого ω.

6. Докажите, что $\mathbb{R}P^{2n}$ и $\mathbb{C}P^{2n}$ не являются границами никакого компактного многообразия, а $\mathbb{R}P^{2n+1}$ и $\mathbb{C}P^{2n+1}$ являются границами компактных многообразий.

7. Докажите, что для любого натурального k существует единственный характеристический класс $s_k(\xi) \in H^{2k}(X; \mathbb{Z})$ комплексных векторных расслоений ξ над клеточной базой X, удовлетворяющий условиям:

а) если ξ — расслоение над X и $\dim X < 2k$, то $s_k(\xi) = 0$;

б) $s_k(\xi \oplus \eta) = s_k(\xi) + s_k(\eta)$;

в) если ξ — одномерное расслоение, то $s_k(\xi) = c_1(\xi)^k$.

Date: 18 октября 2021 г.