КОБОРДИЗМЫ И ДЕЙСТВИЯ ТОРА
ЛИСТОК 4: ОБРАЗУЮЩИЕ КОЛЬЦА КОМПЛЕКСНЫХ БОРДИЗМОВ

ЛЕКТОР: Т. Е. ПАНОВ

Гиперповерхностью Милнора называется неособое комплексное подмногообразие в $\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j$, $j \geqslant i \geqslant 0$, задаваемое как

$$H_{ij} = \{(z_0 : \dots : z_i) \times (w_0 : \dots : w_j) \in \mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j \colon z_0 w_0 + \dots + z_i w_i = 0\}.$$

1. Покажите, что $H_{11} \cong \mathbb{C}P^1$.

2.

а) Докажите, что H_{1j} комплексно бордантно $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^{j-1}$, т. е. представляет разложимый элемент в кольце комплексных бордизмов Ω^U. (Указание: вычислите характеристические числа; было бы интересно найти явное геометрическое описание этого бордизма.)

б) Докажите, что H_{1j} не гомеоморфно $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^{j-1}$. (Указание: сравните кольца когомологий.)

3. Представьте полиномиальные образующие a_5 и a_8 (вещественных размерностей 10 и 16) кольца комплексных бордизмов Ω^U в виде линейных комбинаций классов бордизма $[H_{ij}]$.

4. Для каждой пары натуральных чисел i, j определим $2(i+j)$-мерное многообразие $L_{ij} = \mathbb{C}P(\eta \oplus \underline{\mathbb{C}}^j)$, где η — тавтологическое одномерное расслоение над $\mathbb{C}P^i$, а $\underline{\mathbb{C}}^j$ — тривиальное j-мерное комплексное расслоение над $\mathbb{C}P^i$. (Можно заметить, что L_{ij} является проективным торическим многообразием с многогранником моментов комбинаторно эквивалентным произведению симплексов $\Delta^i \times \Delta^j$.)

а) Вычислите кольцо когомологий $H^*(L_{ij}, \mathbb{Z})$.

б) Опишите касательное расслоение $\mathcal{T} L_{ij}$, докажите, что оно раскладывается в сумму одномерных расслоений с точностью до прибавления тривиальных слагаемых.

в) Вычислите $s_{i+j}[L_{ij}]$.

г) Докажите, что классы бордизма $[L_{ij}] \in \Omega^U_{2(i+j)}$ мультипликативно порождают кольцо комплексных бордизмов Ω^U.

5. Пусть M^{2n}_k — неособая гиперповерхность степени k в $\mathbb{C}P^{n+1}$. Докажите, что классы бордизма $[M^{2n}_k]$, $n \geqslant 1$, $k \geqslant 1$, мультипликативно порождают кольцо Ω^U.

6*. Докажите, что каждый класс бордизмо $x \in \Omega^U_n$, $n > 0$, содержит неособое алгебраическое многообразие (не обязательно связное).

Date: 15 ноября 2021 г.