КОБОРДИЗМЫ И ДЕЙСТВИЯ ТОРА
ЛИСТОК 5: ФОРМАЛЬНЫЕ ГРУППЫ И РОДЫ ХИРЦЕБРУХА

ЛЕКТОР: Т.Е. ПАНОВ

1. Докажите, что если кольцо R свободно от кручения, то свойства а) и б) из определения формальной группы влекут в). Другими словами, любая формальная группа над кольцом без кручения коммутативна. Приведите пример некоммутативной формальной группы.

2. *Рядом Гурвица* на кольцом R без кручения называется формальный ряд с коэффициентами в $R \otimes \mathbb{Q}$ вида

$$h(u) = u + \sum_{i \geqslant 1} \frac{h_i}{(i+1)!} u^{i+1}, \quad h_i \in R.$$

Докажите, что функционально обратный ряд к ряду Гурвица является рядом Гурвица. Докажите, что экспонента и логарифм формальной группы $F \in R[[u, v]]$ являются рядами Гурвица.

3. Докажите, что экспонента и логарифм формальной группы

$$F_{\sigma_1, \sigma_2}(u, v) = \frac{u + v + \sigma_1 uv}{1 - \sigma_2 uv}$$

с коэффициентами в $\mathbb{Z}[\sigma_1, \sigma_2]$ имеют вид

$$f(x) = \frac{e^{ax} - e^{bx}}{ae^{bx} - be^{ax}}, \quad g(u) = \frac{\ln(1 + au) - \ln(1 + bu)}{a - b},$$

где $a + b = \sigma_1$, $ab = \sigma_2$.

4. *Эллиптическим синусом Якоби* называется единственная мероморфная функция $f(x) = \mathrm{sn}(x)$, удовлетворяющая уравнению

$$(f'(x))^2 = 1 - 2\delta f^2(x) + \varepsilon f^4(x) \tag{1}$$

с начальными условиями $f(0) = 0$ и $f'(0) = 1$, где $\delta, \varepsilon \in \mathbb{C}$. Таким образом, обратная функция к эллиптическому синусу задаётся эллиптическим интегралом

$$g(u) = \int_0^u \frac{dt}{\sqrt{1 - 2\delta t^2 + \varepsilon t^4}}.$$

Докажите *формулу сложения Эйлера*:

$$F_{\mathrm{ell}}(u, v) = \mathrm{sn}(x + y) = \frac{u\sqrt{1 - 2\delta v^2 + \varepsilon v^4} + v\sqrt{1 - 2\delta u^2 + \varepsilon u^4}}{1 - \varepsilon u^2 v^2}, \tag{2}$$

где $u = \mathrm{sn}\, x$, $v = \mathrm{sn}\, y$. Эта формула задаёт *эллиптическую формальную группу* с экспонентой $\mathrm{sn}(x)$.

Date: 29 ноября 2021 г.

Убедитесь, что при вырождении $\varepsilon = 0$ эллиптический синус превращается в $f(x) = \frac{\sin\sqrt{2\delta}x}{\sqrt{2\delta}}$, а при вырождении $\varepsilon = \delta^2$ — в $f(x) = \frac{\operatorname{th}\sqrt{\delta}x}{\sqrt{\delta}}$.

5. Рассмотрим формальные группы вида

$$F_E(u,v) = \frac{u^2 - v^2}{u\,B(v) - v\,B(u)}, \tag{3}$$

где $B(u) = 1 + \sum_{k\geqslant 2} b_k u^k$ — формальный ряд с коэффициентами $b_2, b_3, \ldots$ из кольца R. Универсальная формальная группа вида (3) имеет кольцо коэффициентов $R_E = \mathbb{Z}[b_2, b_3, \ldots]/\mathcal{I}$, где $\mathcal{I}$ — идеал соотношений ассоциативности. Докажите, что над кольцом $R_E[\frac12]$ формальная группа F_E превращается в эллиптическую формальную группу (2). Покажите также, что $R_E[\frac12] = \mathbb{Z}[\frac12][\delta,\varepsilon]$, где $\delta = -b_2$ и $\varepsilon = b_2^2 + 2b_4$. (Указание: покажите, что экспонента формальной группы F_E удовлетворяет уравнению (1).)

6. Пусть стабильно комплексная структура на многообразии M задаётся изоморфизмом $c_{\mathcal{T}}\colon \mathcal{T}M \oplus \underline{\mathbb{R}}^{2(m-n)} \to \xi$, где $\xi = \xi_1 \oplus \ldots \oplus \xi_m$ — сумма комплексных одномерных расслоений. Докажите, что значение рода Хирцебруха φ на M задаётся формулой

$$\varphi[M] = \Bigl(\prod_{i=1}^{m} \frac{x_i}{f(x_i)}\Bigr)\langle M\rangle,$$

где $x_i = c_1(\xi_i)$, $i = 1, \ldots, m$.

7. Докажите, что $\chi_{a,b}$-род комплексного проективного пространства вычисляется по формуле

$$\chi_{a,b}[\mathbb{C}P^n] = (-1)^n(a^n + a^{n-1}b + \ldots + ab^{n-1} + b^n).$$

8. Связная версия комплексной K-теории имеет кольцо коэффициентов $K^*(pt) = \mathbb{Z}[\beta]$. Является ли эта теория точной по Ландвеберу?