Поля алгебраических чисел - 2.

Дедлайн для задач 24 - 28 : вторник, 7 декабря.

Дедлайн можно отодвинуть, если у вас завал, но о том, что вы не успеваете (хоть и намерены сдать задание), меня следует предупредить.

Задачи.

24. Докажите, что $D_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_K) \cap k = (Tr_{K/k}(\mathcal{O}_K))^{-1}$.
25. Приведите пример $\mathbf{Z}_p$-решётки $N \subset \mathbf{Q}_p \oplus \mathbf{Q}_p$ такой, что $\mathfrak{d}_{\mathbf{Z}_p}(N) \neq \mathfrak{d}_{\mathbf{Z}_p}(\pi_1(N))\mathfrak{d}_{\mathbf{Z}_p}(\pi_2(N))$.
26. Пусть d - бесквадратное целое число, $K = \mathbf{Q}(\sqrt{d})$. Докажите, что при $d \leq -5$, $D \equiv 3 \mod 4$ кольцо $\mathcal{O}_K$ не является кольцом главных идеалов (указание: постройте идеал $I \subset \mathcal{O}_K$ такой, что идеал $N_{K/\mathbf{Q}}(I)$ не порождается $N_{K/\mathbf{Q}}(a)$ ни для какого $a \in \mathcal{O}_K$).
27. Пусть K/k - алгебраическое расширение, $|| \; ||$ - нормирование на K, ограничение которого на k тривиально. Докажите, что $|| \; ||$ само тривиально.
28. Пусть K - поле, снабженное нормированием. Докажите, что если K локально компактно, то оно полно.

Упражнения.

Упражнения полезно сделать, чтобы не оставлять ничего за спиной. Записывать и сдавать решения не нужно.

1. Разберите доказательство теоремы 3.33 из английского конспекта.
2. Докажите теорему 3.30 из английского конспекта без предположения о локальной компактности поля k.