Теория Галуа

Задачи.

Дедлайн для задач 9 - 17: вторник, 19 октября. Обратите внимание, что нумерация задач (в отличие от упражнений) сплошная.
Дедлайн можно отодвинуть, если у вас завал, но о том, что вы не успеваете (хоть и намерены сдать задание), меня следует предупредить.

9. Докажите, что $[k_P : k] = \deg P$.

10. Пусть K/k - конечное сепарабельное расширение, $\Sigma_{K/k}^{\bar{k}/k} = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$. Докажите, что $\alpha \in K$ порождает расширение K над $k \Leftrightarrow \sigma_i(\alpha)$ все различны.

11. Приведите пример конечного расширения K/k такого, что K не может быть порождено над k одним элементом.

12. Пусть K - поле. Докажите, что любая конечная подгруппа в K^* циклична (указание: используйте теорему Безу).

13. Пусть K - конечное поле с числом элементов q.

а) Докажите, что $q = p^f$, где $p = \mathrm{char} K$, а f - натуральное число.

б) Пусть Ω - алгебраически замкнутое поле характеристики p. Докажите, что $Fr : \Omega \to \Omega,\ x \mapsto x^p$ - автоморфизм поля Ω (он называется абсолютным автоморфизмом Фробениуса).

в) Докажите, что поле K изоморфно подполю $\mathbf{F}_q$ поля Ω, состоящему из всех элементов, неподвижных относительно автоморфизма Fr^f (т.е. удовлетворяющих уравнению $x^q - x = 0$).

14. Докажите, что $\mathbf{F}_{p^m} \subset \mathbf{F}_{p^n} \Leftrightarrow m \,|\, n$.

15. Пусть $k \subset M \subset K,\ K/k$ - расширение Галуа, $\widetilde{\sigma} \in \mathrm{Gal}\,(K/k),\ \widetilde{\sigma}\,|_M = \sigma$. Проверьте, что $\mathrm{Gal}\,(K/\sigma(M)) = \widetilde{\sigma} \circ \mathrm{Gal}\,(K/M) \circ \widetilde{\sigma}^{-1}$.

16. Пусть a - целое число, свободное от квадратов, $a \geq 2$. Положим $K = \mathbf{Q}_{T^3-a,\,\mathrm{split}}$. Представьте K в форме $K = \mathbf{Q}(\alpha, \beta)$ любым удобным образом и составьте список элементов $\mathrm{Gal}\,(K/\mathbf{Q})$, указывая их действие на α и β.

17. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n$ - различные простые числа. Положим $P(T) = \prod_{i=1}^{n}(T^2 - p_i),\ K = \mathbf{Q}_{P,\,\mathrm{split}}$. Вычислите $\mathrm{Gal}\,(K/\mathbf{Q})$.

(продолжение на следующей странице)

Упражнения.

Упражнения полезно сделать, чтобы не оставлять ничего за спиной. Записывать и сдавать решения не нужно.

1. Пусть $\{x_i\} \in K$ -базис векторного пространства K over k, $\{y_j\} \in L$ - базис L над K. Докажите, что $\{x_i y_j\}$ - базис L над k.
2. Докажите, что для любого непостоянного полинома $P \in k[T]$ $k_{P,\,\mathrm{split}}$ - нормальное расширение.
3. Пусть $k \subset M \subset K$, K/k сепарабельно. Докажите, что K/M сепарабельно.

Разберите доказательства следующих утверждений:

4. Мультипликативность сепарабельной степени в башнях (2.18.1).
5. Эквивалентность двух определений нормальности (2.25).