5. Метрическая топология

В этой части k будет конечным расширением поля $\mathbf{Q}$. Основные конструкции проходят также и для случая, когда k- конечное расширение поля $\mathbf{F}_q(t)$ (его можно считать сепарабельным, заменив при необходимости переменную t), конкретные вычисления в последнем случае могут отличаться.
Как и прежде, поле k является полем частных дедекиндовой области $\mathcal{O}$. В числовом случае множество кандидатов на подкольцо $\mathcal{O} \subset k$ содержит наименьший по включению элемент (целое замыкание $\mathbf{Z}$ в k, оно же пересечение всех d.v.r., для которых k является полем частных), и будет предполагаться, что $\mathcal{O}$ именно таково.
В функциональном случае естественный однозначный выбор кольца $\mathcal{O}$ неосуществим, поскольку указанное пересечение совпадает с полем констант.
Поле вычетов $\mathcal{O}/\mathfrak{p}$ любого простого идеала $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}$ конечно и, следовательно, совершенно (т.е. не имеет несепарабельных расширений).

Формула произведения.

Поле k может быть снабжено набором нормирований $|| \ ||_v$, где индекс v пробегает полный список простых идеалов $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}$, в числовом случае объединенный со списком т.н. "бесконечных" нормирований, которые соответствуют слагаемым в правой стороне формулы $\mathbf{V}_\infty \stackrel{\text{def}}{=} k \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R} = \mathbf{R}^s \oplus \mathbf{C}^t$. Нормирования из первой части списка неархимедовы, из второй - архимедовы.

Нормирования определены с точностью до эквивалентности. Из теорем 1.7 и 3.31 несложно вывести, что с учетом этого вышеприведенный список полон.

В функциональном случае список нормирований совпадает со списком d.v.r., для которых k является полем частных; все нормирования неархимедовы.

Пополнение поля k относительно нормирования v будем обозначать k_v, а образ $x \in k$ в нем - x_v. Если v неархимедово, то $\mathcal{O}_v \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in k_v \mid ||z||_v \leq 1\}$ - подкольцо целых элементов.

Теорема-определение 5.1. Существует единственный с точностью до одновременного возведения в одну и ту же положительную степень набор конкретных нормирований (по одному в каждом классе эквивалентности) такой, что $\forall x \in k \ \prod\limits_v ||x||_v = 1$.

Эти нормирования задаются формулами $||x||_v = |x_v|$, если $k_v = \mathbf{R}$, $||x||_v = |x_v|^2$, если $k_v = \mathbf{C}$, и $||x||_v = (\#(\mathcal{O}/\mathfrak{p}))^{-\mathrm{v}_{\mathfrak{p}}(x)}$, если v соответствует кольцу нормирования $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ (которое не следует путать с его пополнением $\mathcal{O}_v$ в поле k_v), и называются нормализованными.

Доказательство. Если K/k - конечное расширение, и K_w - какое-то слагаемое в разложении $K \otimes_k k_v$, то прямое вычисление показывает, что $||x||_w = ||N_{K_w/k_v}(x_w)||_v$ (тем самым, нормализованное нормирование $||\ ||_w$ является не продолжением нормализованного нормирования $||\ ||_v$, а $[K_w : k_v]$ - й степенью этого продолжения). Поскольку $(N_{K/k}(x))_v = \prod_{w|v} N_{K_w/k_v}(x_w)$, то формула произведения для K следует из формулы произведения для k, и остается только выполнить проверку для полей $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{F}_q(t)$, что несложно. Проверку единственности мы опускаем ■

В дальнейшем в этой части будет предполагаться, что нормирования нормализованы. Следует также отметить, что при $k_v = \mathbf{C}$ нормализованное нормирование на самом деле нормированием не является, ибо не удовлетворяет неравенству треугольника. Это не повлияет на дальнейшее, ибо во всех доказательствах хватает ослабленного неравенства треугольника $||x + y|| \leq 2(||x|| + ||y||)$.

Кольцо аделей.

Подкольцо $\mathbf{A}_k \subset \prod k_v$, состоящее из элементов $\{x_v \mid ||x_v|| \leq 1$ для почти всех ($\overset{\text{def}}{=}$ для всех, кроме конечного числа) v, называется кольцом аделей поля k. Это, действительно, подкольцо, ибо почти все (а в функциональном случае - все) нормирования неархимедовы.

В этом определении компоненты аделя суть произвольные элементы локальных полей k_v, не обязанные содержаться в k. Поле k естественно вкладывается в $\mathbf{A}_k$, при этом числу $x \in k$ соответствует адель, компоненты которого мы уже раньше обозначали x_v (что, по опыту, не приводит к недоразумению). Элементы образа называются главными аделями, каждая их компонента содержится в каноническом образе k внутри k_v.

В дальнейшем S будет обозначать произвольное конечное множество нормирований. Мы не фиксируем S раз и навсегда, но предполагаем, что в числовом случае S включает, если не оговорено противное, все архимедовы нормирования.

Топология на $\mathbf{A}_k$ задается базой, состоящей из открытых множеств $\prod U_v$, где $U_v = \mathcal{O}_v = \{x_v \mid ||x_v||_v \leq 1\}$ для $v \notin S$, и $U_v \subset k_v$ - произвольные открытые подмножества для $v \in S$. Наборы S могут варьироваться. Знак $\leq$ не должен вводить в смущение, ибо кольца $\mathcal{O}_v$, определённые для неархимедовых v, открыто-замкнуты в k_v.

Эта топология сильнее топологии на аделях как подмножестве $\prod k_v$. Действительно, представитель базы открытых множеств в топологии подмножества выглядит как $\{x \in \mathbf{A}_k \ |x_v \in U_v$ при $v \in S, \ \ x_v \in \mathcal{O}_v$ при почти всех $v \notin S\}$. Это множество является объединением множеств вида $\{x \in \mathbf{A}_k \ |x_v \in U_v$ при $v \in S, \ \ x_v$ любые при $v \in S_1, \ \ x_v \in \mathcal{O}_v$ при $v \notin S \cup S_1\}$ (S_1 - некоторое конечное множество, не пересекающееся с S), однако обратное неверно. Стоит также отметить, что $\mathbf{A}_k$ не является открытым подмножеством $\prod k_v$ в топологии произведения.

Непосредственно из определения следует,что $\mathbf{A}_k$, в отличие от $\prod k_v$, - локально компактное топологическое пространство (действительно, все k_v локально компактны,а все $\mathcal{O}_v$ компактны).

Расширение полей.

Теорема 5.2. Пусть K/k конечно и сепарабельно. Тогда $K \otimes_k \mathbf{A}_k$ и $\mathbf{A}_K$ изоморфны как топологические кольца.

Доказательство. Пусть $x \in K$ - примитивный элемент для расширения K/k, а P_x - его минимальный полином. Для почти всех неархимедовых нормирований v поля k коэффициенты P_x принадлежат кольцу $\mathcal{O}_v$, так что проекция решетки, порожденной образами элементов $1, x, \dots x^{n-1}$ в пространстве $\mathbf{V}_v = \oplus K_w$, на любое слагамое K_w содержится в кольце $\mathcal{O}_w$. Дискриминант этой решетки - это идеал в $\mathcal{O}_v$ с образуюшей $(\Delta_{P_x})_v$ (см.п.6 части 3). Для почти всех v этот дискриминант и дискриминант решетки $\oplus\mathcal{O}_w$ (порожденный $(\Delta_{K/k})_v$) оба тривиальны, следовательно, решетки совпадают. Тем самым, условия, выделяющие $\mathbf{A}_K$ в левой части формулы $\prod K_w = \prod \mathbf{V}_v = \prod(K \otimes_k k_v) = K \otimes_k \prod k_v = \oplus_0^{n-1} x_i \prod k_v$, и $K \otimes_k \mathbf{A}_k$ в её правой части, эквивалентны. Подобным же образом проверяется и совпадение топологий $\blacksquare$

Фундаментальная область.

$\mathbf{A}_k^+$ - локально-компактная группа, так что, на ней имеется единственная с точностью до умножения на константу инвариантная мера. Её можно определитьследующим образом. Пусть μ_v - мера Лебега на k_v в случае, когда v архимедово, и пусть μ_v -

мера Хаара на k_v, для которой $\mu_v(\mathcal{O}_v) = 1$, в неархимедовом случае. Базу измеримых множеств составляют множества вида $M = \prod_{v \in S} M_v \times \prod_{v \notin S} \mathcal{O}_v$ ($M_v \subset k_v$ измеримы), мера такого множества равна $\mu(M) = \prod_{v \in S} \mu(M_v)$.

Теорема 5.3. Подгруппа k^+ дискретна в $\mathbf{A}_k^+$, факторгруппа $\mathbf{A}_k^+/k^+$ компактна.

Доказательство. Из Теоремы 5.2 следует, что доказать достаточно для случая, когда $k = \mathbf{Q}$ или $k = \mathbf{F}_q(t)$ (поскольку $\mathbf{A}_K^+$ как топологическая группа есть сумма $[K : k]$ экземпляров группы $\mathbf{A}_k^+$) . Например, если $k = \mathbf{Q}$, то окрестность нуля вида $\{x \mid ||x_\infty||_\infty < 1,\ ||x_p||_p \le 1\}$ не содержит других элементов из $\mathbf{Q}$, а множество вида $\{x|||x_\infty||_\infty \le 1/2, ||x_p||_p \le 1\}$ компактно и является фундаментальной областью.

На самом деле, фундаментальную область несложно вычислить явно и для произвольного глобального поля. Например, если $[k : \mathbf{Q}] = n$, то пусть $\mathbf{V}_\infty \stackrel{\text{def}}{=} k \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}$, тогда $\mathbf{V}_\infty \simeq \mathbf{R}^s \oplus \mathbf{C}^t$ (с точностью до перестановки координат и комплексных сопряжений), при этом $\mathbf{A}_k = \mathbf{V}_\infty \oplus \prod'_{\mathfrak{p}} k_{\mathfrak{p}}$, где штрих обозначает, что все, кроме конечного числа, компоненты $\mathfrak{p}$ - целы. Если $x \in \mathbf{A}_k$, то существует конечный набор элементов $\{y_{\mathfrak{p}} \in k\}$ (по одному для каждого $\mathfrak{p}$ такого, что $x_{\mathfrak{p}} \notin \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$), для которого условие $x_{\mathfrak{p}} - y_{\mathfrak{p}} \in \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ выполнено при всех этих $\mathfrak{p}$. Пусть $c \in \mathcal{O}_k$ - какой-нибудь общий знаменатель для этого набора (например, произведение всех знаменателей). Тогда все числа $cy_{\mathfrak{p}}$ лежат в $\mathcal{O}_k$. По китайской теореме об остатках для кольца $\mathcal{O}_k$ можно выбрать такое число $y \in \mathcal{O}_k$, что $\mathrm{v}_{\mathfrak{p}}(y - cy_{\mathfrak{p}}) \ge \mathrm{v}_{\mathfrak{p}}(c)$ для идеалов $\mathfrak{p}$ из нашего набора и $\mathrm{v}_{\mathfrak{p}}(y) \ge \mathrm{v}_{\mathfrak{p}}(c)$ для остальных простых идеалов $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_k$. Тогда все неархимедовы компоненты аделя $x - y/c$ будут целочисленными (т.е $x - y/c \in \mathbf{V}_\infty \oplus \prod_{\mathfrak{p}} \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$), и он будет $k+$ - эквивалентен аделю x. Полученный адель можно еще сдвигать на главные адели, пришедшие из $\mathcal{O}_k$, неархимедовы компоненты при этом останутся целочисленными. Тем самым, фундаментальная область для действия k^+ на $\mathbf{A}_k$ совпадает с $D \oplus \prod_{\mathfrak{p}} \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$, где D - какая-нибудь фундаментальная область для действия канонического образа аддитивной группы $\mathcal{O}_k$ в $\mathbf{V}_\infty$ ($y \mapsto y \otimes 1$; этот образ - решетка ранга n в вещественном n - мерном пространстве $\mathbf{V}_\infty$).

Для дальнейшего полезно сосчитать её меру. Согласно определению, эта мера совпадает с евклидовым объёмом фундаментального параллелипипеда D образа $\mathcal{O}_k$ в $\mathbf{V}_\infty$. Упорядочим элементы $\Sigma_{k/\mathbf{Q}}^{\mathbf{C}/\mathbf{Q}}$ в виде $(\sigma_1, \ldots, \sigma_s, \sigma_{s+1}, \overline{\sigma}_{s+1}, \ldots, \sigma_{s+t}, \overline{\sigma}_{s+t})$, где первые s элементов суть различные вложения k в $\mathbf{R}$, а оставшиеся $2t$ - вложения в $\mathbf{C}$, образ которых не содержится в $\mathbf{R}$, причем каждая пара комплексно сопряженных вложений упорядочена. Этот выбор позволяет отождествить $\mathbf{V}_\infty$ с $\mathbf{R}^s \oplus \mathbf{C}^t$, продолжив вложение $k \to \mathbf{R}^s \oplus \mathbf{C}^t, \quad x \mapsto (\sigma_1(x), \ldots, \sigma_s(x), \sigma_{s+1}(x), \ldots, \sigma_{s+t}(x))$ с k на $\mathbf{V}_\infty$ по $\mathbf{R}$ - линейности. В свою очередь, $\mathbf{R}^s \oplus \mathbf{C}^t$ может быть отождествлено с $\mathbf{R}^n$, если каждой комплексной координате сопоставить её действительную и мнимую части.

Напомним, что дискриминант $\Delta_{k/\mathbf{Q}}$ решётки $\mathcal{O}_k \subset k$ равен определителю Грама её базиса относительно билинейной формы $Tr_{k/\mathbf{Q}}(xy) = \sum\limits_{\sigma \in \Sigma_{k/\mathbf{Q}}^{\mathbf{C}/\mathbf{Q}}} \sigma(x)\sigma(y)$. Если e_j - базис $\mathcal{O}_k$, то этот определитель, как хорошо известно, равен квадрату определителя комплексной матрицы с элементами $a_{\sigma j} = \sigma(e_j)$. В последней каждую пару строк $(\sigma(e_j))$ и $(\overline{\sigma}(e_j))$ можно поменять на пару строк $(\mathrm{Re}\, \sigma(e_j))$ и $(\mathrm{Im}\, \sigma(e_j))$, определитель при этом поделится на $(2\sqrt{-1})^t$. Абсолютная величина определителя итоговой матрицы как раз и есть искомый объём, тем самым, мера фундаментальной области равна $2^{-t}\sqrt{|\Delta_{k/\mathbf{Q}}|}$.

Группа иделей.

Группой иделей $\mathbf{J}_k$ поля k называется группа обратимых элементов кольца $\mathbf{A}_k$. Как множество - это те адели, у которых все компоненты ненулевые и почти все при этом лежат в $\widehat{\mathcal{O}}_v^*$.
Определим на $\mathbf{J}_k$ топологию, базой открытых множеств которой будут множества вида $\{x \in \mathbf{J}_k \mid x_v \in U_v$ при $v \in S, \ x_v \in \mathcal{O}_v^*$ при $v \notin S\}$ ($U_v \subset k_v^*$ - открытые подмножества). Эта топология совпадает с топологией на $\mathbf{J}_k$ как на подмножестве $\mathbf{A}_k \times \mathbf{A}_k$ при вложении $x \mapsto (x, \ x^{-1})$. Действительно, для почти всех нормирований условие на принадлежность элемента $x \in \mathbf{J}_k$ открытому подмножеству в $\mathbf{A}_k \times \mathbf{A}_k$ выглядит как $\{x_v \in \mathcal{O}_v \ \& \ x_v^{-1} \in \mathcal{O}_v\} \Leftrightarrow \{x_v \in \mathcal{O}_v^*\}$. Однако с топологией на $\mathbf{J}_k$ как подмножестве $\mathbf{A}_k$ описанная топология не совпадает по причинам, аналогичным тем, что приведены в описании кольца аделей.

Подгруппа k^* является дискретной подгруппой $\mathbf{J}_k$ (это прямо следует из Теоремы 5.3 и определения топологии на $\mathbf{J}_k$). Однако факторгруппа компактной не является, поскольку, в отличие от аделей, у иделя имеется инвариант (положительное действительное число) - содержание иделя $c(x) \stackrel{\text{def}}{=} \prod ||x_v||_v$. Из формулы произведения (Теорема 5.1) следует, что содержание главного иделя равно 1. Положим $\mathbf{J}_k^1 \stackrel{\text{def}}{=} \ker c : \mathbf{J}_k \mapsto \mathbf{R}_{>0}^*$. Ниже мы убедимся, что группа $\mathbf{J}_k^1/k^*$ компактна.

Теорема 5.4. $\mathbf{J}_k^1$ - замкнутое подмножество $\mathbf{A}_k$ (в топологии $\mathbf{A}_k$). Топология на $\mathbf{J}_k^1$ как на подмножестве $\mathbf{A}_k$ совпадает с топологией на $\mathbf{J}_k^1$ как на подмножестве $\mathbf{J}_k$.

Доказательство. Замкнутость. Пусть $a \in \mathbf{A}_k$, $a \notin \mathbf{J}_k^1$. Построим окрестность a в $\mathbf{A}_k$, не пересекающуюся с $\mathbf{J}_k^1$.
Сперва рассмотрим случай, когда $\prod ||a_v||_v < 1$, т.е. a - это идель с небольшим содержанием или вообще необратимый адель ("содержание" которого, очевидно, равно нулю в том смысле, что соответствующее бесконечное произведение расходится к нулю). Включим в S все v, для которых $||a_v||_v > 1$ и расширим его так, чтобы $\prod\limits_{v\in S} ||a_v||_v > 1$ стало меньше 1. Тогда окрестность точки a в $\mathbf{A}_k$, состоящая из всех аделей, v - компоненты которых близки к a_v при $v \in S$ и целочисленны при $v \notin S$, полностью состоит из аделей с "содержанием" меньше 1 и, следовательно, не пересекается с $\mathbf{J}_k^1$.
Теперь предположим, что $c(a) > 1$ (т.е. a - идель, но "большой"). Включим в S все v, для которых $||a_v||_v \neq 1$ и расширим его так, чтобы $\forall v \notin S \ \ \#(\mathcal{O}_v/\mathfrak{p}_v) > 2c(a)$. Рассмотрим окрестность точки a в $\mathbf{A}_k$, состоящую из всех аделей, v - компоненты которых близки к a_v при $v \in S$ и целочисленны при $v \notin S$. Для любого содержащегося в ней иделя b либо $c(b) > 1$ (если $||b_v||_v = 1$ при всех $v \notin S$) - в этом случае $c(b)$ близко к $c(a)$, либо $c(b) < 1$ (если $||b_v||_v < 1$ хотя бы при одном $v \notin S$) - по выбору S.
Наконец, случай $\prod ||a_v||_v = 1$ невозможен, поскольку тогда $a \in \mathbf{J}_k^1$.
Совпадение топологий. Пусть $a \in \mathbf{J}_k^1$. Любая $\mathbf{A}_k$ - окрестность a содержит окрестность вида $W = \{||x_v - a_v||_v < \epsilon$ при $v \in S,\ ||x_v||_v \leq 1$ иначе$\}$. Если во втором условии неравенство заменить на равенство, получится $\mathbf{J}_k$ - окрестность. Обратно, любая $\mathbf{J}_k$ - окрестность содержит окрестность вида $U = \{||x_v - a_v||_v < \epsilon$ при $v \in S,\ ||x_v||_v = 1$ иначе$\}$,где S содержит все v, для которых $||a_v||_v \neq 1$. Поскольку $c(a) = 1$, то при малом ϵ $\forall x \in U \ \ c(x) < 2$, следовательно, $U \cap \mathbf{J}_k^1 = W \cap \mathbf{J}_k^1$ ■

Теорема 5.5 (Теорема Минковского).
Существует константа C, зависящая только от поля k и такая, что каков бы ни был идель $z \mid c(z) > C$, найдется главный идель y, удовлетворяющий неравенствам $\forall v \ \ ||y||_v \leq ||z_v||_v$.

Доказательство. Пусть $c_0 = \mu(\mathbf{A}_k^+/k^+)$, $c_\delta = \mu(\{x \in A_k \mid ||x_v||_v < \delta$ при архимедовых v и $||x_v||_v \leq 1$ при неархимедовых $v.\})$. Положим $C_\delta = c_0/c_\delta$. Рассмотрим множество $T_{z,\delta} \stackrel{\text{def}}{=} \{t \in \mathbf{A}_k \,||\, ||t_v||_v \leq \delta ||z_v||_v$ при архимедовых v, $||t_v||_v \leq ||z_v||_v$ при неархимедовых $v\}$. Тогда $\mu(T_{z,\delta}) = c_\delta c(z)$. Если $c(z) > C_\delta$, то $\mu(T_{z,\delta}) > c_0$, следовательно, при проекции $\mathbf{A}_k^+ \mapsto \mathbf{A}_k^+/k+$ две разные точки t_1 и t_2 из $T_{z,\delta}$ совпадут. Положим $y =$

$t_1 - t_2$. При достаточно маленьком δ (достаточно взять $\delta = 1/4$) y будет удовлетворять условиям теоремы по неравенству треугольника ■

Идели, идеалы и единицы.

Теорема 5.6. Группа $\mathbf{J}_k^1/k^*$ компактна.

Доказательство. Поскольку топология на J_k^1 есть топология подмножества $\mathbf{A}_k$, достаточно построить компактное $W \subset \mathbf{A}_k$ такое, что отображение $W \cap \mathbf{J}_k^1 \mapsto \mathbf{J}_k^1/k^*$ сюръективно. Выберем идель z такой, что $c(z) > C$ (где C - константа из теоремы Минковского), и положим $W \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbf{A}_k \mid \forall v \ \ ||x_v||_v \leq ||z_v||_v\}$. Пусть теперь $u \in \mathbf{J}_k^1$ произволен, тогда $c(u^{-1}z) = c(z) > C$, и по теореме Минковского найдется $y \in k^*$ такой, что $y \in u^{-1}W \Rightarrow yu \in W$ ■

Группа классов идеалов кольца $\mathcal{O}$ в числовом случае (соответственно, дивизоров поля k степени 0 в функциональном случае) конечна, поскольку в обоих случаях это дискретная группа, являющаяся непрерывным образом компактной группы $\mathbf{J}_k^1$. Разница определяется тем, что в числовом случае образ иделя в группе дробных идеалов кольца $\mathcal{O}$ не зависит от его архимедовых компонент, вследствие чего любому дробному идеалу можно подобрать прообраз из $\mathbf{J}_k^1$, в то время как в функциональном случае для этого необходимо, чтобы дивизор имел степень 0 (а кольцо $\mathcal{O}$ вообще не фиксировано - см. преамбулу).

Введем обозначения $\mathbf{J}_S \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbf{J}_k \mid \forall v \notin S \ ||x_v||_v = 1,\ \mathbf{J}_S^1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{J}_S \cap \mathbf{J}_k^1,\ U_S \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{J}_S \cap k^*$.

Теорема 5.7 (Дирихле о единицах). U_S - прямая сумма конечной циклической группы и свободной группы с $\#(S) - 1$ образующими.

Доказательство. Подгруппа $\mathbf{J}_S^1$, по определению, открыта и замкнута в $\mathbf{J}_k^1$, следовательно, $\mathbf{J}_S^1/U_S = \mathbf{J}_S^1/(\mathbf{J}_S^1 \cap k^*)$ - открытая и замкнутая подгруппа в $\mathbf{J}_k^1/k$. Поэтому $\mathbf{J}_S^1/U_S$ компактна. Определим логарифмическое отображение $\lambda : \mathbf{J}_S \mapsto \mathbf{R}^{\#(S)}$ формулой $\lambda(x) = \{\log(||x||_v$ для $v \in S\}$. Очевидно, что $\lambda(\mathbf{J}_S^1) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{B}$ лежит внутри гиперплоскости в $\mathbf{R}^{\#(S)}$, отвечающей нулевой сумме координат, и состоит из всех точек этой гиперплоскости, координаты которых, соответствующие неархимедовым нормированиям $v \in S$, являются целочисленными кратными $\log(q_v = \#(\mathcal{O}_v/m_v))$. Далее, для любой пары положительных констант c_1 и c_2 множество $\{x \in \mathbf{J}_S \mid \forall v \in S\ c_1 \leq ||x||_v \leq c_2\}$ компактно, поэтому ядро ограничения λ на подгруппу U_S (дискретную в $\mathbf{J}_S^1$) конечно, а образ U_S дискретен в $\mathbf{R}^{\#(S)-1}$ и, следовательно, представляет собой свободную абелеву группу ранга не выше $\#(S)-1$. Ядро, по определению, содержит любой корень из 1 и будучи конечным, совпадает с группой корней из 1 в k (в функциональном случае это в точности группа $\mathbf{F}_q^*$). Поскольку $\mathbf{J}_S^1/U_S$ компактна, $\lambda(\mathbf{J}_S^1)/\lambda(U_S) = \mathcal{B}/\lambda(U_S)$ также компактна. Из этого легко следует. что $\operatorname{rk}\lambda(U_S) = \#(S)-1$, и это завершает доказательство ■

Теорема 5.8 (аппроксимационная теорема). Пусть v_0 - какое-нибудь нормирование на k (неважно, архимедово или нет). Пусть $\mathbf{B}_{k,\ v_0}$ - факторкольцо $\mathbf{A}_k$ по идеалу, состоящему из аделей, у которых все компоненты, кроме той, что отвечает v_0, равны нулю. Иными словами, $\mathbf{B}_{k,\ v_0}$ получается из $\mathbf{A}_k$ "забыванием" v_0 - компоненты. Топология на $\mathbf{B}_{k,\ v_0}$ определяется аналогично тому, как это делалось на на $\mathbf{A}_k$. Тогда k всюду плотно в $\mathbf{B}_{k,\ v_0}$.

Доказательство. Нужно проверить, что для любого S, не содержащего v_0, набора $\{x_v \in k_v,\ \ v \in S\}$ и числа $\epsilon > 0$ существует элемент $y \in k$ такой, что $||x_v - y_v|| \leq \epsilon$ при $v \in S,\ \ ||y_v|| \leq 1$ при $v \notin S,\ \ v \neq v_0$. Пусть W - какая-нибудь компактная фундаментальная область для действия k^+ на $\mathbf{A}_k$, содержащая 0. Посольку W может быть покрыта конечным числом подмножеств $\mathbf{A}_k$ из базы топологии, проекции W на все координаты v, кроме конечного числа, содержатся в $\mathcal{O}_v$, то есть лежат в шаре радиуса $r_v = 1$, а оставшиеся проекции лежат в шарах каких-то радиусов r_v.
Заметим, что при любом $a \in k^*\ \ aW$ - также фундаментальная область (поскольку умножение на a просто переставляет элементы группы k^+). Поскольку для $v = v_0$ мы вольны устанавливать сколь угодно далекую границу, то по теореме Минковского можно найти такое $a \in k$, что $\forall v \in S\ ||a||_v r_v \leq \epsilon$, а $\forall v \notin S\ ||a||_v r_v \leq 1$ (кроме $v = v_0$). Проекция aW на v - компоненту будет находиться внутри шара радиуса ϵ с центром в 0 при $v \in S$ и внутри единичного шара при всех $v \notin S$, кроме $v = v_0$. Определим адель x, дополнив исходный набор $\{x_v\}$ нулями для $v \notin S$. Тогда $x + aW$ - также фундаментальная область, и внутри неё можно найти главный адель y, который, очевидно, удовлетворяет условию теоремы ■

Насыщенные идеалы и дивизоры Аракелова.

Для того, чтобы аналогия с функциональным полем стала более явной, в числовом случае полезно расширить группу дробных $\mathcal{O}_k$ - идеалов $I(\mathcal{O}_k)$.

Определим группу насыщенных дробных идеалов $I(\overline{\mathcal{O}}_k) \stackrel{\mathrm{def}}{=} I(\mathcal{O}_k) \times \prod\limits_{v|\infty} \mathbf{R}^*_{>0}$ и группу дивизоров Аракелова $\overline{\mathrm{Div}}_k \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum\limits_{\mathfrak{p}} \mathbf{Z} + \sum\limits_{v|\infty} \mathbf{R}$.

Очевидный изоморфизм между этими группами ставит в соответствие насыщенному дробному идеалу $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_f, \mathcal{A}_\infty)$ набор, состоящий из целых чисел $\mathrm{v}_{\mathfrak{p}}(\mathcal{A}_f)$ для неархимедовых нормирований и вещественных чисел $-\log(||\mathcal{A}_v||)$ для архимедовых. Естественный гомомрфизм $k^* \to I(\overline{\mathcal{O}}_k)$ отображает $a \mapsto ((a), \{||a||_v\})$ и аналогично для дивизоров; его ядро, как нетрудно видеть, есть подгруппа корней из 1 в k^*, 'элементы образа называются главными насыщенными дробными идеалами/дивизорами Аракелова, а коядро называется группой классов насыщенных дробных идеалов/дивизоров Аракелова (эти, также изоморфные, группы мы будем обозначать $\mathrm{Cl}\,(\overline{\mathcal{O}}_k)$ и $\overline{\mathrm{CH}}_k$).

На самом деле эти два определения имеют разную природу: в геометрическом случае аналогом насыщенных дробных идеалов являются обратимые пучки на полной кривой, а дивизоров Аракелова - нуль-циклы, при этом изоморфизм групп классов пучков (с точностью до изоморфизма) и дивизоров (по модулю линейной эквиваленнтности) задается первым классом Черна. Разница становится ощутимой при обобщении на более высокие размерности.

Степень дивизора Аракелова $\deg(d) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum\limits_{\mathfrak{p}} d_{\mathfrak{p}} \log(\#(\mathcal{O}_k/\mathfrak{p})) + \sum\limits_{v|\infty} d_v$. Степень главного дивизора равняется нулю по формуле произведения, так как $\deg((a)) = -\log(\prod\limits_v ||a||_v)$, где v пробегает все нормирования. Следовательно, отображение степени переносится и на группу $\overline{\mathrm{CH}}_k$; пусть $\overline{\mathrm{CH}}{}^0_k$ - его ядро. Имеется очевидное сюръективное отображение $\mathrm{div}\, : \mathbf{J}_k \to \overline{\mathrm{Div}}_k$, ставящее в соответствие иделю его дивизор, при этом $\deg(\mathrm{div}\,(y)) = -\log(c(y))$. Это отображение становится непрерывным, если ввести на дивизорах Аракелова топологию, дискретную на $\mathbf{Z}$ - слагаемых и обычную на $\mathbf{R}$ - слагаемых, и ему, в согласии с только что сказанным, соответствует непрерывное сюръективное отображение $\mathbf{J}^1_k/k^* \to \overline{\mathrm{CH}}{}^0_k$. Следовательно, $\overline{\mathrm{CH}}{}^0_k$ - также компактная группа.
Пусть S - конечное множество нормирований, содержащее все архимедовы, I_S - подгруппа группы дробных $\mathcal{O}_k$ - идеалов, порожденная простыми идеалами, отвечающими

нормированиям вне S. Тогда, применяя “лемму о змее” к диаграмме

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & k^* & \longrightarrow & k^* & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & (\mathbf{R}^{s+t} + \sum\limits_{\mathfrak{p}\in S} \mathbf{Z}\log\#(\mathcal{O}_k/\mathfrak{p}))^0 & \longrightarrow & \overline{\mathrm{Div}}\,^0_k & \longrightarrow & I_S & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

получаем точную последовательность

$$0 \to W \to U_S \to (\mathbf{R}^{s+t} + \sum_{\mathfrak{p}\in S} \mathbf{Z}\log\#(\mathcal{O}_k/\mathfrak{p}))^0 \to \overline{\mathrm{CH}}\,^0_k \to \mathrm{Cl}\,_S(\mathcal{O}_k) \to 0.$$

Здесь W - группа корней из 1, $\mathbf{Z}$ - слагаемые соответствуют неархимедовым нормированиям, входящим в S, ноль наверху означает гиперплоскость, соответствующую нулевой сумме координат (для того, чтобы это была настоящая сумма без весовых коэффициентов, мы растянули соответствующим образом $\mathbf{Z}$ - координаты), U_S - группа S - единиц, а $\mathrm{Cl}\,_S(\mathcal{O}_k)$ - группа классов S - идеалов. Из этой последовательности и компактности группы $\overline{\mathrm{CH}}\,^0(k)$ следуют одновременно теорема Дирихле о единицах и теорема о конечности числа классов S - идеалов.

Отображение группы иделей $\mathbf{J}_k$ на группу дивизоров Аракелова $\overline{\mathrm{Div}}\,_k$ приводит к потере информации: его ядро - подгруппа $\mathbf{J}_{k,\ \mathrm{div}=0} = \prod\limits_{k_v=\mathbf{R}} (\pm 1) \prod\limits_{k_v=\mathbf{C}} (||z||_v = 1) \prod\limits_{\mathfrak{p}} \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^*$. Переходя к классам, имеем: $0 \mapsto \mathbf{J}_{k,\ \mathrm{div}=0}/W \mapsto \mathbf{J}_k/k^* \mapsto \overline{\mathrm{CH}}\,_k \mapsto 0$. Между тем, теория полей классов устанавливает взаимнооднозначное соответствие между группами Галуа конечных абелевых расширений поля k и конечными факторгруппами группы классов иделей $C_k = \mathbf{J}_k/k^*$. Максимальная конечная факторгруппа $\overline{\mathrm{CH}}\,_k$ есть, очевидно, группа классов идеалов $\mathrm{Cl}\,(\mathcal{O}_k)$. Ядром сквозного отображения $C_k \mapsto \overline{\mathrm{CH}}\,_k \mapsto \mathrm{Cl}\,(\mathcal{O}_k)$ является подгруппа $C_{(0)} \overset{\mathrm{def}}{=} \mathbf{J}_{(0)}/(k^* \cap \mathbf{J}_{(0)}) = \mathbf{J}_{(0)}/U_{(0)}$, где $\mathbf{J}_{(0)}$ - это содержащая подгруппу $\mathbf{J}_{k,\ \mathrm{div}=0}$ подгруппа $\prod\limits_{v|\infty} k_v^* \prod\limits_{\mathfrak{p}} \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^* \subset \mathbf{J}_k$, а $U_{(0)}$ - подгруппа тех главных иделей, что произошли из элементов $\mathcal{O}_k^*$. Отсюда видно, что бОльшая часть информации о конечных факторгруппах C_k скрывается в ядре. Это мотивирует следующее определение.

Определение. Модулем поля k называется набор $\mathfrak{m}$, состоящий из неотрицательных целых чисел $\mathfrak{m}_{\mathfrak{p}}$ (по одному для каждого простого идеала $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_k$), почти все из которых равны нулю, и чисел $\mathfrak{m}_v = 0$ или 1 (по одному для каждого архимедового нормирования, такого, что $k_v = \mathbf{R}$).

Каждому модулю отвечает подгруппа
$\mathbf{J}_\mathfrak{m} = \prod_{k_v=\mathbf{C}} k_v^* \prod_{k_v=\mathbf{R},\ \mathfrak{m}_v=0} k_v^* \prod_{k_v=\mathbf{R},\ \mathfrak{m}_v=1} (k_v^*)_{>0} \prod_{\mathfrak{p},\,\mathfrak{m}_\mathfrak{p}=0} \mathcal{O}_k^* \prod_{\mathfrak{p},\ \mathfrak{m}_\mathfrak{p}>0} (1+\mathfrak{p}^{\mathfrak{m}_\mathfrak{p}}) \subset \mathbf{J}_k$, её образ в группе классов иделей C_k называется конгруэнцподгруппой $C_\mathfrak{m}$, отвечающей модулю $\mathfrak{m}$. Поскольку $J_\mathfrak{m}$ открыта в $\mathbf{J}_k$, $C_\mathfrak{m}$ открыта в C_k. Определенная выше подгруппа $C_{(0)}$ имеет конечный индекс в C_k (так как факторгруппа - это конечная группа $\mathrm{Cl}\,(\mathcal{O}_k)$), а $C_\mathfrak{m} = \mathbf{J}_\mathfrak{m}/(k^* \cap \mathbf{J}_\mathfrak{m})$ имеет конечный индекс в $C_{(0)}$ (он делит индекс $\mathbf{J}_\mathfrak{m}$ в $\mathbf{J}_{(0)}$, который, очевидно, конечен), поэтому конгруэнцподгруппа $C_\mathfrak{m}$ имеет конечный индекс в C_k. Факторгруппа $\mathrm{Cl}_\mathfrak{m} \stackrel{\mathrm{def}}{=} C_k/C_\mathfrak{m} = \mathbf{J}_k/k^*\mathbf{J}_\mathfrak{m}$ называется лучевой группой классов по модулю $\mathfrak{m}$. Из предыдущего следует, что это конечная абелева группа, являющаяся расширением обычной группы классов идеалов $\mathrm{Cl}\,(\mathcal{O}_k)$ (последняя отвечает модулю, у которого все $\mathfrak{m}_v$ и $\mathfrak{m}_\mathfrak{p}$ равны нулю).

Без труда проверяется, что любая открытая подгруппа конечного индекса в C_k содержит какую-нибудь конгруэнцподгруппу. В терминах теории полей классов это означает, что группа Галуа максимального абелева расширения поля k может быть представлена как обратный предел факторгрупп, изоморфных лучевым группам классов, а само максимальное абелево расширение является объединением расширений $K_\mathfrak{m}/k$ таких, что $\mathrm{Gal}\,(K_\mathfrak{m}/k) = \mathrm{Cl}_\mathfrak{m}$.

Лучевая группа классов, отвечающая модулю $\mathfrak{m}$ такому, что $\mathfrak{m}_\mathfrak{p} = 0$ при всех $\mathfrak{p}$, и $\mathfrak{m}_v = 1$ при всех вещественных v, называется группой классов дивизоров в узком смысле (narrow class group) кольца $\mathcal{O}_k$ и иногда обозначается $\mathrm{Cl}^+(\mathcal{O}_k)$.