

Независимый Университет, осень 2021

Г.Б. Шабат,

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ

Лекция 2 (16 сентября 2021) – план
Что такое алгебраическая кривая?

Установка. Алгебраические понятия и их геометрические иллюстрации. Основное поле \mathbb{k} , его алгебраическая замкнутость. Основные примеры. Алгебраические и трансцендентные числа. Алгебраическая кривая как носитель поля рациональных функций.

Функциональные поля. Конечно порождённые расширения. Степень трансцендентности. Двусмысленность общепринятых обозначений. Координатные функции как функции на плоских кривых. Обозначения $\mathcal{K} \supset \mathbb{k}$. Реализация

$$\mathcal{K} \simeq \text{ff} \left(\frac{\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]}{\mathfrak{p}} \right),$$

где $\mathfrak{p} \in \text{спец}(\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n])$.

Экономные реализации поля \mathcal{K} . Для $x \in \mathcal{K} \setminus \mathbb{k}$ реализация $\mathcal{K} \supset \mathbb{k}(x)$ с условием $(\mathcal{K} : \mathbb{k}(x))$. Теорема о примитивном элементе

$$\implies \mathcal{K} \simeq \mathbb{k}(x, y) = \text{ff} \left(\frac{\mathbb{k}[x, y]}{\mathfrak{p}} \right),$$

где $\mathfrak{p} \in \text{спец}(\mathbb{k}[x, y])$. То есть \mathcal{K} – поле рациональных функций на плоской алгебраической кривой. Особенности таких кривых. Бирациональные изоморфизмы.

О моделях функциональных полей. Обозначения $\mathcal{K} = \mathbb{k}(\mathbf{X})$. Элементы функционального поля \mathcal{K} как "почти функции" $\mathbf{X} \dashrightarrow \mathbb{k}$. Три модели поля $\mathcal{K} = \mathbb{k}(t)$. Рациональные кривые. Иррациональность кривой $x^3 + y^3 = 1$.

+++++

Задачи.

2.1. Приведите пример расширения поля $\mathbb{k}(x, y)$ степени трансцендентности 1, не являющегося конечно порождённым.

2.2. Обозначим $\mathbb{k}[[x]]$ кольцо формальных степенных рядов от x .

(а) Докажите, что поле частных $\text{ff}(\mathbb{k}[[x]])$ изоморфно полю рядов Лорана

$$\mathbb{k}((x)) := \left\{ \sum_{n >> -\infty} a_n x^n \mid a_i \in \mathbb{k} \right\}.$$

(б) Является ли расширение $\mathbb{k}((x)) \supset \mathbb{k}(x)$ конечно порождённым?

(в) Какова степень трансцендентности расширения $\mathbb{k}((x)) \supset \mathbb{k}(x)$?

2.3. (Первая задача из учебника И.Р. Шафаревича). Вычислите площадь петли декартова листа, то есть вещественной кривой