Независимый Московский Университет,
Алгебраические кривые, осень 2021

4

4.1. Обозначим для точек $P, Q \in \mathbf{P}_2(\Bbbk)$ через $P^{\bullet}Q$ единственную прямую, содержащую P и Q, а для прямых $\ell, m \in \mathbf{P}_2(\Bbbk)^*$ через $\ell_{\bullet}m$ пересечение этих прямых (подразумевается $P \neq Q$ и $\ell \neq m$). В очевидных обозначениях построены (*двойственные* друг другу) отображения

$$^{\bullet} : \Big(\mathbf{P}_2(\Bbbk) \times \mathbf{P}_2(\Bbbk)\Big) \setminus \Delta \longrightarrow \mathbf{P}_2(\Bbbk)^*$$

и

$$_{\bullet} : \Big(\mathbf{P}_2(\Bbbk)^* \times \mathbf{P}_2(\Bbbk)^*\Big) \setminus \Delta* \longrightarrow \mathbf{P}_2(\Bbbk)^*$$

Пользуясь теоремой Паскаля, определите на $(^{\bullet},_{\bullet})$-языке конику, проходящую через точки $A, B, C, D, E \in \mathbf{P}_2(\Bbbk)$. Как используется *общее положение* пяти точек?

4.2. Для проективного многообразия $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{P}_N(\Bbbk)$ и числа $n \in \mathbb{N}_{\leq N}$ докажите равносильность следующих утверждений:

(1) $\mathrm{degtr}_{\Bbbk}\Bbbk(\mathbf{V}) = n$;

(2) Существует цепочка проективных подмногообразий

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 \supset \mathbf{V}_1 \supset \cdots \supset \mathbf{V}_n,$$

но не существует более длинных таких цепочек;

(3) Общая композиция проектирований многообразия $\mathbf{V}$ на n-мерное подпространство пространства $\mathbf{P}_N(\Bbbk)$– сюръективное конечнократное отображение;

(4) Пересечение многообразия $\mathbf{V}$ с любым $N - n$-мерным подпространством пространства $\mathbf{P}_N(\Bbbk)$ непусто, а с *общим* подпространством любой меньшей размерности – пусто.

4.3. Отождествите грассманиан прямых в $\mathbf{P}_3(\Bbbk)$ с *квадрикой Клейна* $\mathbf{Kl} \subset \mathbf{P}_5(\Bbbk)$.

4.4. Докажите гладкость квадрики $\mathbf{Kl} \subset \mathbf{P}_5(\Bbbk)$

(а) непосредственно, пользуясь результатами предыдущей задачи;

(б) выведя этот результат из *однородности* многообразия $\mathbf{Kl}$, то есть из существования транзитивно действующей на ней группой проективных преобразований.

4.5. Докажите гладкость *кривых Ферма*, заданных при $d \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ на плоскости $\mathbf{P}_2(\Bbbk)$ уравнением в однородных координатах

$$x^d + y^d = z^d.$$

30 сентября, *Г.Б. Шабат*