

НМУ, 2 курс, анализ на многообразиях. Листок 5.
Подмногообразия. Векторные поля и распределения. 25.10.2022.

Задача 1. Пусть $\varphi : M \rightarrow N$ гладкое отображение, а X гладкое векторное поле на M , причём $d_x\varphi(X_x) = d_y\varphi(X_y)$, если $\varphi(x) = \varphi(y)$. Обязательно ли существует гладкое векторное поле на N , φ -связанное с X ?

Задача 2. Пусть $\varphi : M \rightarrow N$ гладкое отображение, X_M, Y_M векторные поля на M , а X_N, Y_N соответственно φ -связанные с ними векторные поля на N . Доказать, что тогда $[X_M, Y_M]$ и $[X_N, Y_N]$ тоже φ -связаны.

Пусть M многообразие, а $\iota : N \hookrightarrow M$ вложенное подмногообразие. Так как ι гомеоморфизм на образ, а $d_p\iota : T_pN \rightarrow T_{\iota(p)}M$ изоморфизм, то мы обычно отождествляем p с $\iota(p)$, а $X \in T_pN$ с $d_p\iota(X) \in T_{\iota(p)}M$. Поэтому мы говорим, что вектор X в точке $q \in M$ касателен к N , подразумевая, что существует такой вектор $Y \in T_{\iota^{-1}(q)}N$, что $d_{\iota^{-1}(q)}(Y) = X$. Докажите, что коммутатор двух векторных полей на M , касательных к подмногообразию N , — тоже векторное поле, касательное к N .

Задача 3. Пусть $N \subset M$ подмногообразие. Рассмотрим гладкую кривую $\gamma : (a, b) \rightarrow M$, такую, что $\gamma((a, b)) \subset N$. Покажите, что не обязательно $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}N$ для каждого $t \in (a, b)$.

Задача 4. Рассмотрим \mathbb{S}^1 как единичную окружность в комплексной плоскости и тор \mathbb{T} как $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Определим отображение $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, полагая $\varphi(t) = (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i \alpha t})$, где α — иррациональное число. Докажите, что (\mathbb{R}, φ) — плотное подмногообразие в \mathbb{T} (оно называется плотной обмоткой тора). Это подмногообразие вложено?

Задача 5. Построить пример такой поверхности Σ в \mathbb{R}^n , что её сечение $\Sigma \cap H$ некоторой гиперплоскостью $H \subset \mathbb{R}^n$ не является подмногообразием.

Задача 6*. Пусть M — гладкое многообразие и A — подмножество в M . Фиксируем топологию на A . Тогда на A существует не более одной структуры гладкого многообразия, такой, что (A, i) — подмногообразие в M , где i — отображение вложения.

Задача 7*. Пусть снова A — подмножество в M . Если в индуцированной топологии A обладает структурой гладкого многообразия, такой, что (A, i) — подмногообразие M , то на A существует единственная структура многообразия, то есть единственная локально евклидова топология с второй аксиомой счётности и единственная дифференцируемая структура, такая, что (A, i) — подмногообразие в M .

Задача 8. В пространстве \mathbb{R}^3 с координатами x, y, z рассмотрим поле плоскостей, заданное уравнением $dz = ydx$. Нарисуйте это поле плоскостей. Докажите, что у него нет интегральной поверхности.

Задача 9. В пространстве \mathbb{R}^{2n+1} с координатами $x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n, z$ рассмотрим поле гиперплоскостей (называемое распределением Картана), заданное уравнением

$$dz = \sum_{i=1}^n y^i dx^i.$$

Какова максимальная размерность интегрального подмногообразия?

Задача 10. Пусть \mathcal{J} — идеал форм на многообразии M , локально порожденный на области $U \subset M$ независимыми 1-формами $\omega_1, \dots, \omega_r$. Доказать, что \mathcal{J} является дифференциальным идеалом тогда и только тогда, когда для формы $\omega = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_r$ существует такая 1-форма α , что $d\omega = \alpha \wedge \omega$.