

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ЭКЗАМЕН,  
11 ДЕКАБРЯ 2022

Напишите работу за 4 часа или меньше. Не предполагается, что вы решите все задачи.

Укажите свое имя, число страниц или листов. Сфотографируйте и пришлите мне на e-mail [petya.pushkar@gmail.com](mailto:petya.pushkar@gmail.com).

Пользоваться можно любой литературой.

Через некоторое время, постараюсь до конца декабря, я проверю работы. Результаты можно будет узнать у меня или в учебной части. Удачи!

*Задача 1.* Найти диффеоморфизм, выпрямляющий интегральные кривые уравнения  $\dot{x} = x + \cos t$  и сохраняющий координату  $t$ .

*Задача 2.* а) Найдите  $\pi$ -периодическое решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = 2x - y + 6\sin^2(t) \end{cases}$$

или докажите, что его нет.

б) Найдите площадь фигуры  $g^\pi([0, 1]^2)$  ( $g^t$  – отображение потока за время  $t$ ).

*Задача 3.* Найти производную по параметру  $C$  при  $C = 0$  решения уравнения  $\ddot{x} = \dot{x}^2 + x^3$  с начальным условием  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = C$ .

*Задача 4.* Рассмотрим векторное поле  $[x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}, 2x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + 3z\frac{\partial}{\partial z}]$  в трехмерном пространстве ( $[, ]$  обозначает векторное произведение).

а) Докажите, что это поле касается сферы радиуса 1 с центром в нуле.

б) Исследуйте особые точки ограничения этого поля на эту сферу на устойчивость.

*Задача 5.* Рассмотрим три векторных поля на плоскости  $v_1 = (2x - y - 1)\frac{\partial}{\partial x} + (y - x)\frac{\partial}{\partial y}$ ,  $v_2 = (\sin x - 1)\frac{\partial}{\partial x} + (\cos x - \sin y)\frac{\partial}{\partial y}$ ,  $v_3 = (2x + \cos y)\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$ .

а) Докажите, что у этих полей есть фазовые потоки (определенные

при всех  $(x, y, t)$ .

б) Обозначим отображение фазового потока поля  $v$  за время  $t$  через  $g_v^t$ . Найти вектор скорости кривой  $t \mapsto g_{v_3}^t \circ g_{v_2}^t \circ g_{v_1}^t O$  при  $t = 0$ , тут  $O$  – начало координат.

*Задача 6.* Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\begin{cases} \dot{x} = y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = -x + y(1 - x^2 - y^2). \end{cases}$$

а) Выпишите уравнение (или можно сказать – систему уравнений) в вариациях вдоль периодического непостоянного решения этого уравнения.

б) Есть ли у этого уравнения в вариациях ограниченное (при всех  $t$ ) ненулевое решение?

*Задача 7.* Найти все двумерные подпространства пространства непрерывных  $2\pi$ -периодических функций на  $\mathbb{R}$ , инвариантные относительно сдвигов (то есть такие двумерные подпространства  $L$ , что для любой функции  $f \in L$  и любого  $t \in \mathbb{R}$  функция  $f(x + t)$  тоже принадлежит  $L$ ).

*Задача 8.* Рассмотрим дифференциальное уравнение  $\dot{x} = 2tx^2 + (\sin t)x - 1$ . Есть ли у него определенное на  $[0, \infty[$  и ограниченное решение?

*Задача 9.* Каким может быть число 1-периодических решений дифференциального уравнения  $\dot{x} = a(t)x^2 + b(t)x + c(t)$  ( $a, b, c$  – гладкие 1-периодические функции)?