

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ЭКЗАМЕН,
11 ДЕКАБРЯ 2022

Напишите работу за 4 часа или меньше. Не предполагается, что вы решите все задачи.

Укажите свое имя, число страниц или листов. Сфотографируйте и пришлите мне на e-mail petya.pushkar@gmail.com.

Пользоваться можно любой литературой.

Через некоторое время, постараюсь до конца декабря, я проверю работы. Результаты можно будет узнать у меня или в учебной части. Удачи!

Задача 1. Найти диффеоморфизм, выпрямляющий интегральные кривые уравнения $\dot{x} = x + \cos t$ и сохраняющий координату t .

Задача 2. а) Найдите π -периодическое решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = 2x - y + 6\sin^2(t) \end{cases}$$

или докажите, что его нет.

б) Найдите площадь фигуры $g^\pi([0, 1]^2)$ (g^t – отображение потока за время t).

Задача 3. Найти производную по параметру C при $C = 0$ решения уравнения $\ddot{x} = \dot{x}^2 + x^3$ с начальным условием $x(0) = 0, \dot{x}(0) = C$.

Задача 4. Рассмотрим векторное поле $[x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}, 2x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + 3z\frac{\partial}{\partial z}]$ в трехмерном пространстве ($[,]$ обозначает векторное произведение).

а) Докажите, что это поле касается сферы радиуса 1 с центром в нуле.

б) Исследуйте особые точки ограничения этого поля на эту сферу на устойчивость.

Задача 5. Рассмотрим три векторных поля на плоскости $v_1 = (2x - y - 1)\frac{\partial}{\partial x} + (y - x)\frac{\partial}{\partial y}$, $v_2 = (\sin x - 1)\frac{\partial}{\partial x} + (\cos x - \sin y)\frac{\partial}{\partial y}$, $v_3 = (2x + \cos y)\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$.

а) Докажите, что у этих полей есть фазовые потоки (определенные

при всех (x, y, t) .

б) Обозначим отображение фазового потока поля v за время t через g_v^t . Найти вектор скорости кривой $t \mapsto g_{v_3}^t \circ g_{v_2}^t \circ g_{v_1}^t O$ при $t = 0$, тут O – начало координат.

Задача 6. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\begin{cases} \dot{x} = y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = -x + y(1 - x^2 - y^2). \end{cases}$$

а) Выпишите уравнение (или можно сказать – систему уравнений) в вариациях вдоль периодического непостоянного решения этого уравнения.

б) Есть ли у этого уравнения в вариациях ограниченное (при всех t) ненулевое решение?

Задача 7. Найти все двумерные подпространства пространства непрерывных 2π -периодических функций на \mathbb{R} , инвариантные относительно сдвигов (то есть такие двумерные подпространства L , что для любой функции $f \in L$ и любого $t \in \mathbb{R}$ функция $f(x + t)$ тоже принадлежит L).

Задача 8. Рассмотрим дифференциальное уравнение $\dot{x} = 2tx^2 + (\sin t)x - 1$. Есть ли у него определенное на $[0, \infty[$ и ограниченное решение?

Задача 9. Каким может быть число 1-периодических решений дифференциального уравнения $\dot{x} = a(t)x^2 + b(t)x + c(t)$ (a, b, c – гладкие 1-периодические функции)?