

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 2022,
ЛИСТОК 3 (28 СЕНТЯБРЯ)

Задача 1. Для векторного поля $v(x) = kx$ на прямой вычислить значение $\varphi_N(t_0)$, построенное ломаными Эйлера, и доказать, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_N(t_0) = e^{kt_0} x_0.$$

Задача 2. Для векторного поля на плоскости $v(x, y) = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$ и $x_0 = (a, 0)$ вычислить $\varphi_N(t_0)$, построенное ломаными Эйлера, и найти предел $\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_N(t_0)$.

Задача 3. Пусть z неподвижная точка сжатого отображения f с параметром λ и $\rho(x, f(x)) = d$. Докажите, что

$$\rho(x, z) \leq \frac{d}{1 - \lambda}.$$

Задача 4. Касательная к графику $P(\varphi)$ (P – отображение Пикара из доказательства теоремы существования) в точке с абсциссой t параллельна вектору $(v(\varphi(t), t), 1)$ – докажите.

Задача 5. Докажите, что в конечномерном пространстве любые две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ эквивалентны, то есть существуют такие положительные числа C_1, C_2 , что

$$C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$$

при любом x .

Задача 6. Являются ли следующие отображения липшицевыми:

а) $y = \sqrt{x}$ (отображение $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ со стандартной метрикой в образе и прообразе $\rho(x, y) = |x - y|$);

б) $y = x^2$ (те же области определений и значений и метрика);

в) $y = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ (отображение $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$; на плоскости и луче евклидовы метрики).

Задача 7. Докажите, что липшицевы отображения непрерывны. Верно ли, что непрерывное отображение компакта липшицево?