Обыкновенные дифференциальные уравнения, задачи В.И. Арнольда

В квадратных скобках указано число очков за задачу.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} = -\sin x + \varepsilon \cos t.$$

В первых шести задачах предполагается, что $\varepsilon = 0$.

Задача 1. Линеаризовать это уравнение в точке $x = \pi$, $\dot{x} = 0$ [1].

Задача 2. Устойчиво ли это положение равновесия [1]?

Задача 3. Найти матрицу Якоби преобразования фазового потока за время $t = 2\pi$ в точке $x = \pi$, $\dot{x} = 0$ [3].

Задача 4. Найти производную решения с начальным условием $x = \pi$, $\dot{x} = 0$ по параметру ε при $\varepsilon = 0$ [5].

Задача 5. Нарисовать графики решения и его производной по t при начальном условии $x = 0$, $\dot{x} = 2$ [3].

Задача 6. Найти это решение [3].

Пусть $(*)$ – уравнение в вариациях вдоль указанного в пятой задаче решения.

Задача 7. Имеет ли уравнение $(*)$ неограниченные решения [8]?

Задача 8. Имеет ли уравнение $(*)$ ненулевые ограниченные решения [8]?

Задача 9. Найти определитель Вронского фундаментальной системы решений уравнения $(*)$, зная, что $W(0) = 1$ [5].

Задача 10. Выписать явно уравнение $(*)$ и решить его [10].

Задача 11. Найти собственные числа и векторы оператора монодромии для уравнения в вариациях вдоль решения с начальным условием $x = \pi/2$, $\dot{x} = 0$ $(\varepsilon = 0)$ [16].

Задача 12. Доказать, что исходное уравнение имеет 2π-периодическое решение, гладко зависящее от ε и обращающееся в $x = \pi$ при $\varepsilon = 0$ [6].

Задача 13. Найти производную этого решения по ε при $\varepsilon = 0$ [6].

Рассмотрим уравнение

$$u_t + uu_x = -\sin x.$$

Задача 14. Написать уравнение характеристик [2].

Задача 15. Найти наибольшее значение t, при котором решение задачи Коши с $u|_{t=0} = 0$ продолжается на $[0, t[$ [8].