НМУ, Алгебра-1
Листок 1. 05.09.2022

Задача 1. Пусть K — поле. Наименьшее такое натуральное n, что в поле K выполнено

$$\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n\text{ слагаемых}}=0$$

называется *характеристикой* поля K. Если такого n не существует, то $\operatorname{char} K = 0$.

а) Докажите, что если $p = \operatorname{char} K > 0$, то p — простое число.

б) Докажите, что если $p = \operatorname{char} K > 0$, то $\mathbb{F}_p$ вкладывается в K как подполе, а если $\operatorname{char} K = 0$, то в K вкладывается $\mathbb{Q}$.

в) Покажите, что если K — конечное поле, то $|K| = p^n$ для некоторого простого числа p и некоторого $n \geq 1$.

Задача 2. Пусть $\mathbb{F}_2$ — поле из двух элементов. Обозначим через $\mathbb{F}_4$ и $\mathbb{F}_8$ соответственно кольца, получающиеся присоединением к $\mathbb{F}_2$ корней многочленов x^2+x+1 и x^3+x+1.

а) Покажите, что $\mathbb{F}_4$ и $\mathbb{F}_8$ — поля.

б) Вложено ли $\mathbb{F}_4$ в $\mathbb{F}_8$?

Задача 3. Пусть $\mathbb{H}(\mathbb{Q})$ — тело кватернионов с рациональными коэффициентами. Докажите, что существует бесконечно много различных вложений поля $\mathbb{Q}(i)$ в $\mathbb{H}(\mathbb{Q})$. Сколько существует вложений $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$ в $\mathbb{H}(\mathbb{Q})$?

Задача 4. Для натурального числа n определим многочлен с комплексными коэффициентами

$$\Phi_n(x) = \prod_{\substack{1\leq k\leq n\\(k,n)=1}} \left(x - \exp\left(\frac{2\pi i k}{n}\right)\right).$$

а) Покажите, что

$$x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$$

б) Вычислите $\Phi_3(x), \Phi_5(x)$ и $\Phi_{15}(x)$.

в) Предполагая, что в действительности $\Phi_n(x)$ всегда является многочленом с целыми коэффициентами, покажите, что если для некоторого натурального n и натурального $q > 1$ существуют $d_1, \ldots, d_k \mid n$, $d_i < n$ для всех i такие, что

$$q^n - 1 = q - 1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{q^n-1}{q^{d_i}-1},$$

то $\Phi_n(q) \mid q-1$.

г) Покажите, что $|\Phi_n(q)| > q-1$ для всех $n > 1$ и тем самым покажите, что малая теорема Веддербёрна следует из целочисленности многочленов Φ_n.

Задача 5*. Пусть I — правый (или левый) идеал в кольце A. Индексом I называется число элементов в A/I, то есть количество различных классов эквивалентности элементов A относительно отношения $a \sim b \iff a-b \in I$. Пусть $h = a+bi+cj+dk$ — кватернион Гурвица. Найдите индекс правого идеала hH в кольце H.

Задача 6.

а) Пусть n — натуральное число. Сколько различных решений $(a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4$ имеет уравнение $a^2+b^2+c^2+d^2 = 2^n$?

б)* Пусть p — простое число, J — правый идеал в H/pH индекса p^2. Докажите, что существует единственный правый идеал I в H такой, что $I/pH = J$.

в)* Покажите, что для простого нечетного p уравнение $x^2+y^2+z^2+t^2 = 4p$ имеет $24(p+1)$ различных решений в целых числах.