НМУ, Алгебра-1
Листок 10. 07.11.2022

Задача 1.
Приведите пример двух модулей M и N и инъективного отображения $f : M \to N$ такого, что $f^{\otimes 2}$ не инъективно.

Задача 2.

а) Пусть $A \in M_n(\mathbb{R})$ — кососимметрическая матрица. Покажите, что $\exp(A)$ — ортогональная матрица.

б) Покажите, что при $n = 2$ любая ортогональная матрица с определителем 1 является экспонентой от кососимметричной.

Задача 3.
Пусть $A = \{a_{ij}\}$ — кососимметричная матрица $2n \times 2n$ над полем K характеристики 0. Сопоставим матрице A элемент

$$\omega_A = \sum_{i<j} a_{ij} e_i \wedge e_j \in \Lambda^2 K^{2n}.$$

Пусть $\frac{1}{n!}\omega_A^n = p(A) e_1 \wedge e_2 \wedge \dots e_{2n}$. Докажите, что $p(A)^2 = \det A$.

Задача 4.

а) Пусть V и W — векторные пространства над полем K, $a, b \in \mathbb{N}$. Постройте инъективное отображение $\Lambda^a(V) \otimes \Lambda^b(W) \to \Lambda^{a+b}(V \oplus W)$.

б) Использовав отображения из предыдущего пункта, для любого натурального n вычислите
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

Задача 5.
Пусть R — целостное коммутативное кольцо, а K — его поле частных. Рассмотрим K как R-модуль.

а) Докажите, что $\Lambda^2 K = 0$.

б) Пусть $M \subset K$ — R-подмодуль. Докажите, что при $n \geq 2$ выполнено равенство $\Lambda^n(M) = \mathrm{Tor}(\Lambda^n(M))$.

Задача 6.
Пусть q — степень нечетного простого числа, а n — натуральное число. Сколько существует классов эквивалентности симметричных билинейных форм на $\mathbb{F}_q^n$?