НМУ, Алгебра-1
Листок 4. 26.09.2022

Задача 1. Для любых $x_1, \ldots, x_n$ вычислите детерминант

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Задача 2. Пусть p — простое число, K — конечное поле из p^n элементов и $\varphi : K \to K$ — автоморфизм Фробениуса, то есть $\varphi(x) = x^p$. Вычислите характеристический многочлен φ как $\mathbb{F}_p$-линейного оператора.
Задача 3. Пусть A — обратимая матрица $n \times n$, $b \in K^n$. Покажите, что единственное решение уравнения $Ax = b$ имеет вид

$$x_i = \frac{\det A_i(b)}{\det A},$$

где $A_i(b)$ — матрица, получающаяся заменой $i-$ого столбца A на b.
Задача 4. Пусть $w \in \mathbb{C}$. Найдите определитель и собственные значения отображения умножения на w как $\mathbb{R}-$линейного оператора на $\mathbb{C}$. Решите такую же задачу для $\mathbb{H}$.
Задача 5.

а) Для перестановки $\sigma \in S_n$ положим $D(\sigma) = \#\{i, j : 1 \leq i < j \leq n, \sigma(i) > \sigma(j)\}$ и $\operatorname{sgn} \sigma = (-1)^{D(\sigma)}$. Покажите, что $\operatorname{sgn} \sigma_1\sigma_2 = \operatorname{sgn} \sigma_1 \operatorname{sgn} \sigma_2$.

б) Опишите все гомоморфизмы $S_n \to \mathbb{C}^*$.

Задача 6.
Докажите, что для всякого $n \in \mathbb{N}$ детерминант

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{n-1} & a_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-3} & a_{n-2} \end{vmatrix} = \det(a_{(i+j-2) \mod n})$$

раскладывается на линейные множители над $\mathbb{C}$ как многочлен от переменных $a_0, \ldots, a_{n-1}$.
Задача 7.
Для натурального числа n рассмотрим векторное пространство V_n, порожденное над $\mathbb{C}$ линейно независимыми векторами $e_\sigma, \sigma \in S_n$. Если $x_\sigma, \sigma \in S_n$ — комплексные числа, зададим оператор $A : V_n \to V_n$ формулой

$$A_n e_\sigma = \sum_{\tau \in S_n} x_{\tau\sigma} e_\tau.$$

а) Докажите, что $\det A_n$ делится на суммы $\sum_\sigma x_\sigma$ и $\sum_\sigma (-1)^\sigma x_\sigma$ как многочлен от переменных x_σ.

б) Докажите, что при $n = 3$ существует квадратичный многочлен $P(x_\sigma)$ такой, что

$$\det A_3 = \left(\sum_\sigma x_\sigma\right)\left(\sum_\sigma (-1)^\sigma x_\sigma\right) P(x_\sigma)^2$$

Задача 8.
Пусть $f(x) \in K[x]$ — многочлен степени n. Пусть $\mathcal{P}_m$ — подпространство $K[x]$, состоящее из многочленов степени$< m$. Рассмотрим оператор $D : \mathcal{P}_{2n-1} \to \mathcal{P}_{2n-1}$, заданный так: представим любой многочлен $G \in \mathcal{P}_{2n-1}$ в виде $G(x) = g_0(x) + x^{n-1}g_1(x)$, где $\deg g_0 < n-1$, тогда $D(G(x)) = g_0(x)f(x) + g_1(x)f'(x)$.Определим дискриминант $\mathrm{Disc}(f)$ формулой

$$\mathrm{Disc}(f) = \frac{(-1)^{n(n-1)/2}}{a}\det D,$$

где a — старший коэффициент f.

а) Вычислите дискриминант квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ и кубического трёхчлена $x^3 + px + q$.

б) Докажите, что
$$\mathrm{Disc}(f) = a^{2n-2}\prod_{i<j}(\lambda_i - \lambda_j)^2,$$
где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — корни f, взятые с учетом кратности.