НМУ, Алгебра-1
Листок 5. 03.10.2022

Задача 1. Пусть p — простое число.

а) Покажите, что $a \in \mathbb{F}_p$ представимо в виде $b^2, b \in \mathbb{F}_p$ тогда и только тогда, когда $a^{(p+1)/2} = a$.

б) Докажите, что для любого n существует ровно одно поле из p^n элементов.

Задача 2. Определим кольцо

$$R = \prod_p \mathbb{F}_p = \{(a_2, a_3, a_5, \dots) : a_p \in \mathbb{F}_p \text{ для всех } p\}$$

с покоординатными операциями сложения и умножения. Пусть $I = \bigoplus_p \mathbb{F}_p$ — элементы R, для которых существует p_0 такое, что $a_p = 0$ при $p > p_0$.

а) Пусть $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал R, содержащий I. Докажите, что поле $F := R/\mathfrak{m}$ имеет характеристику 0.

б) Докажите, что в поле F хотя бы одно из чисел $2, 3$ и 6 является квадратом.

в) Докажите, что все квадратичные расширения F изоморфны.

Задача 3.

а) Докажите, что кольца $\mathbb{Z}[i]$ и $\mathbb{Z}[\omega]$ евклидовы, где $\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$.

б) Докажите, что простое число p представимо в виде $x^2 + y^2$ для некоторых целых x, y тогда и только тогда, когда $p \not\equiv 3 \pmod 4$.

в) Опишите простые числа, представимые в виде $x^2 + xy + y^2$ для некоторых целых x, y.

Задача 4*.
Докажите, что существует бесконечно много таких простых p, что для некоторых $0 < a, b < p$ число $(a+b)^p - a^p - b^p$ делится на p^5.

Задача 5.
Пусть R — коммутативное кольцо.

а) Покажите, что множество N_R всех нильпотентных элементов R образует идеал, который лежит в пересечении всех простых идеалов R. (Этот идеал называется нильрадикалом)

б) Пусть $f \notin N_R$. Рассмотрите множество S всех идеалов $I \subset R$ таких, что $f^m \notin I$ для всех $m \geq 0$. Докажите, что максимальный элемент S по включению — простой идеал и тем самым установите, что N_R совпадает с пересечением всех простых идеалов R.

Задача 6.

а) Пусть p — нечетное простое число, $n \geq 1$. Докажите, что множество $1 + p \cdot \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ образует группу по умножению и отображения

$$l : 1 + p \cdot \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to p \cdot \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$

и

$$e : p \cdot \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to 1 + p \cdot \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z},$$

заданные формулами

$$l(1+px) = px - \frac{p^2}{2}x^2 + \frac{p^3}{3}x^3 - \dots$$

и

$$e(px) = 1 + px + \frac{p^2x^2}{2!} + \frac{p^3x^3}{3!} + \dots$$

являются взаимно обратными гомоморфизмами групп.

б) Докажите, что для нечетного простого p выполнено

$$(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^* \simeq \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z}.$$

в) Что получится, если $p = 2$?

Задача 7.

а) Докажите, что норма, индуцированная вложением кольца $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-19}}{2}\right]$ в $\mathbb{C}$ является нормой Дедекинда-Хассе.

б) Докажите, что это кольцо не является евклидовым.
Указание: Рассмотрите необратимый элемент наименьшей нормы и отфакторизуйте по идеалу, порожденному этим элементом.