

Задание #1

5 сентября

Если не сказано обратного, A — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей.

Задача 1

Рассмотрим короткую точную последовательность A -модулей

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0.$$

Докажите, что M нётеров тогда и только тогда, когда модули M' и M'' нётеровы.

Задача 2

Докажите, что всякий максимальный идеал в кольце $C^0([0, 1]; \mathbb{R})$ непрерывных функций на отрезке со значением в \mathbb{R} . Имеет вид

$$\mathfrak{m}_a = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f(a) = 0\}$$

для некоторого $a \in [0, 1]$.

Задача 3

Верно ли утверждение предыдущей задачи, если замкнутый отрезок $[0, 1]$ заменить на открытый интервал $(0, 1)$?

Задача 4

Пусть A — нётерово кольцо. Докажите, что кольцо формальных степенных рядов $A[[x]]$ также нётерово.

Задача 5

Докажите, что если $A^{\oplus n} \simeq A^{\oplus m}$, то $m = n$.

Задача 6

Докажите, что элемент $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ кольца $A[x]$ нильпотентен (является делителем нуля) тогда и только тогда, когда все $a_i \in A$ нильпотентны (найдётся ненулевой $b \in A$, такой что $bP = 0$).