НМУ, I курс, 08.09.2022

Листок 1.

Задача 1. Пусть $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Докажите, что множество 2^X, состоящее из всех подмножеств множества X, с операцией Δ является абелевой группой.

Задача 2. Пусть X – непустое множество. На множестве его подмножеств 2^X определена такая операция «звездочка» $A \to A^\star$, что $A^\star \cup A = X$ и $(A^\star)^\star = A$ для всякого $A \subset X$. Обязана ли операция «звездочка» совпадать с операцией дополнения, то есть $A^\star = X \setminus A$?

Задача 3. Пусть A — непустое множество и $f\colon A \to A$. Множество $B \subset A$ назовем *инвариантным* для f, если $f(B) \subset B$. Докажите, что множество A бесконечно тогда и только тогда, когда у всякого отображения $f\colon A \to A$ существует непустое инвариантное множество B, отличное от A.

Задача 4. Пусть A, B, C — непустые множества и $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$, $h\colon C \to A$. Предположим, что среди отображений $h\circ g\circ f$, $g\circ f\circ h$, $f\circ h\circ g$ любые два являются сюръективными, а третье — инъективным или же любые два являются инъективными, а третье — сюръективным. Докажите, что f, g, h — биекции.

Задача 5. Пусть E – счетное множество на плоскости. Докажите, что (a) существует такой вектор v, что $E + v$ не пересекается с E, (b) существует угол φ и точка O, что $R_O^\varphi E$ не пересекается с E. (c) существует прямая l такая, что множество $S_l E$ не пересекается с множеством E. (Здесь R_O^φ — поворот с центром в точке O на угол φ против часовой стрелки, а S_l — симметрия относительно прямой l)

Задача 6. Докажите, что у функции на числовой прямой множество точек строгого локального минимума не более чем счетно.

Задача 7. Докажите, что

(a) существует биекция $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ вида $f(x, y) = h(\varphi(x) + \psi(y))$;

(b)* существует биекция $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ вида $f(x, y) = \varphi(x) + \psi(y)$.

Задача 8. Существует ли линейно упорядоченный по включению континуальный набор подмножеств множества натуральных чисел?

Задача 9. Счетное упорядоченное множество называется плотным, если для всяких двух элементов есть элемент, лежащий между ними. Докажите, что между любыми двумя плотными счетными множествами без наименьших и наибольших элементов существует монотонная биекция.

Задача 10. Пусть $(X, \le)$ — частично упорядоченное множество и A — его непустое подмножество. Точной верхней гранью $\sup A$ множества A называется такой элемент $s \in X$, что $x \le s$ для всех $x \in A$, а если $x \le y$ для всех $x \in A$, то $s \le y$. Сформулируйте аналогичное определение точной нижней грани $\inf A$. Частично упорядоченное множество $(X, \le)$ называется полной структурой, если всякое его непустое подмножество имеет точную нижнюю грань и точную верхнюю грань.

(a) Пусть Y — некоторое множество. Докажите, что $(2^Y, \subset)$ является полной структурой.

(b) Докажите (не привлекая иррациональные числа), что множество двоично рациональных чисел отрезка $[0, 1]$, то есть чисел вида $\frac{m}{2^k}$, не является полной структурой.

(c) Докажите теорему *Кнастера–Тарского*: если $(X, \le)$ — полная структура и $f\colon X \to X$ — монотонное отображение, то у f существует неподвижная точка, то есть такой элемент $x \in X$, что $f(x) = x$.

(d) Пусть $g\colon A \to B$ и $h\colon B \to A$ — инъекции. Рассмотрим отображение $f\colon 2^A \to 2^A$, заданное равенством $f(C) = A\setminus h\big(B\setminus g(C)\big)$. Докажите, что f монотонное отображение частично упорядоченного множества $(2^A, \subset)$ в себя. По пункту (c) у отображения f есть неподвижная точка, то есть такое множество C, что $C = A \setminus h\big(B \setminus g(C)\big)$. Выведите из этого утверждение теоремы *Кантора–Бернштейна*: множества A и B равномощны.