НМУ, I курс, 22.09.2022

Листок 2.

Задача 1. Докажите, что на множестве бесконечных десятичных дробей выполняется **аксиома полноты**: *любые два непустых множества, одно из которых лежит левее другого на числовой оси, можно разделить точкой.*

Задача 2. С помощью аксиомы полноты докажите существование числа $\sqrt{3}$. Докажите, что это иррациональное число.

Задача 3. Заяц прыгает по окружности против часовой стрелки прыжками одинаковой длины, причем никогда не попадает в свой след. Окружность пересекает узкий ручеек. Докажите, что рано или поздно заяц наступит лапой в ручей.

Точка a называется **предельной точкой** *множества E, если во всяком интервале (открытом круге), содержащем точку a, бесконечно много точек множества E.* Если точка a принадлежит E и не является предельной точкой множества E, то a называется **изолированной точкой**.

Задача 4. Пусть все точки бесконечного множества $E \subset \mathbb{R}$ изолированные.

(a) Приведите примеры, когда множество предельных точек этого множества пусто, состоит из N различных точек, является бесконечным множеством.

(b) Может ли множество предельных точек E быть континуальным?

Задача 5. Найдите все предельные точки множества E, где

(a) $E = \{\operatorname{tg} n\colon\ n \in \mathbb{N}\}$, (b) $E = \{\sin n\colon\ n \in \mathbb{N}\}$,

(c) $E = \{\,\{\sqrt{2}n\}\colon\ n \in \mathbb{N}\}$, (d) $E = \{\sqrt{m} - \sqrt{n}\colon\ m, n \in \mathbb{N}\}$.

Через $\{x\}$ обозначаем дробную часть x.

Задача 6. Из некоторого множества удалили все его изолированные точки, затем из того множества, которое получилось, опять удалили все изолированные точки и так далее. Возможно ли такую процедуру проделать бесконечное число раз, причем так, что каждый раз найдется, что удалить?

Задача 7. Докажите, что в определении множества вещественных чисел можно аксиому полноты заменить на утверждение: *всякое бесконечное ограниченное множество имеет предельную точку.*

Задача 8.

(a) Приведите пример такой функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что всякая точка плоскости является предельной точкой графика этой функции.

(b) Постройте такое подмножество E плоскости $\mathbb{R}^2$, что всякая точка плоскости является предельной точкой E, но пересечение E со всякой прямой состоит из не более чем двух точек.

Задача 9. Тюрьма находится в начале координат, а дорога совпадает с осью OX, поле – вся плоскость вне оси OX. Из тюрьмы сбежал заключенный. Известно, что при движении по дороге его скорость равна 5 км/ч, а по полю – 2 км/ч. Через час его хватились. Укажите все возможные точки плоскости, в которых может находиться заключенный.

Задача 10. Множество называется **выпуклым**, если оно со всякими двумя точками содержит отрезок, их соединяющий.

(a) Докажите *теорему Хелли*: конечный набор выпуклых множеств на плоскости, в котором всякие три множества пересекаются, имеет общую точку.

(b) Покажите на примере, что утверждение теоремы Хелли для бесконечного набора выпуклых множеств не выполняется.

(c) На плоскости задано конечное семейство прямых. Известно, что любые три из них можно пересечь кругом единичного радиуса. Докажите, что тогда все прямые можно пересечь кругом единичного радиуса.

(d) На плоскости задан бесконечный набор замкнутых прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат, причем всякие два прямоугольника пересекаются. Тогда все прямоугольники имеют общую точку.