НМУ, I курс, 29.09.2022

Листок 3.

Задача 1. Пусть последовательность неотрицательных чисел a_n такова, что

$$a_{n+m} \le a_n + a_m.$$

Докажите, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$.

Задача 2.

(a) Докажите, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Этот предел обозначается через e.

(b) Докажите, что

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{nn!}, \quad 0 < \theta_n < 1.$$

Обоснуйте иррациональность числа e.

Задача 3.(Теорема Штольца)

(a) Пусть y_n – строго возрастающая последовательность положительных чисел, причем $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$. Докажите, что из равенства $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = A$ следует равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = A$.

(b) Пусть y_n – строго убывающая последовательность, причем верны равенства $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Докажите, что из равенства $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = A$ следует равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = A$.

(c) Найдите асимптотику последовательности $x_n = \sum_{k=1}^n k^m$.

(d) Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{\ln n}$.

Положим

$$y_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n+1), \quad z_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$$

Задача 4. Считаем неравенство $\ln x \le x - 1$ известным.

(a) Проверьте, что y_n не убывает, а z_n не возрастает;

(b) Проверьте, что $z_n - y_n \le 1/n$;

(c) Докажите, что существует число $C > 0$, для которого верно равенство

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln n + C + \varepsilon_n,$$

где $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

(d) Докажите (действуя по аналогии с пунктами (a)–(c)), что найдется число C такое, что

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{n+1} + C + \varepsilon_n,$$

где $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

Задача 5. Колоду игральных карт (длина каждой равна 10 см) кладут на край стола и сдвигают относительно друг друга так, чтобы образовался выступ возможно большей длины. Края карт должны быть параллельны краю стола. Найдите длину наибольшего выступа, если в колоде n карт.

Задача 6. Вы держите один конец резинового шнура длиной 1 км. От второго его конца, который закреплен, к вам со скоростью 1 см/с ползет жук. Каждый раз, как только он проползает 1 см, вы удлиняете резинку на 1 км. Доползет ли жук до вашей руки? Если да, то оцените сколько ему потребуется времени?

Задача 7. Пусть $a > 1$ и $k \in \mathbb{N}$. Докажите, что

$$(a)\ \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0,\ (b)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n^{1/k}} = 0,\ (c)\ \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0,\ (d)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Задача 8. Найдите все a, для которых сходится последовательность x_n, заданная соотношениями

$$x_{n+1} = \frac{a}{2} + \frac{x_n^2}{2}, \quad x_1 = \frac{a}{2}.$$

Задача 9. Пусть задан не более чем счетный набор ограниченных последовательностей $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}, \ldots$. Докажите, что существует такая возрастающая последовательность номеров $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, что каждая из подпоследовательностей $\{a_{n_k}\}$, $\{b_{n_k}\}$, $\{c_{n_k}\}, \ldots$ сходится.

Задача 10. Найдите все подмножества числовой прямой, которые могут являться множествами частичных пределов такой последовательности a_n, что

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0.$$

Задача 11. Сходится ли последовательность $a_n = \sin 2^n$?

Задача 12. Докажите, что для всякой последовательности a_n с положительными членами выполнено

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \Big(\frac{1 + a_{n+1}}{a_n}\Big)^n \geq e,$$

причем оценка неулучшаема.

Задача 13. Пусть $|q| < 1$. Обоснуйте сходимость и найдите суммы:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, (b) $\sum_{n=0}^{\infty} nq^n$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{10^n}$, где f_n – числа Фибоначчи, т. е. $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ и $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$.

Задача 14. Пусть последовательность a_n убывает к нулю. Докажите, что ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ сходятся и расходятся одновременно. Исследуйте сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

Задача 15.(Признак Лейбница) Пусть последовательность a_n монотонно убывает к нулю. Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ сходится.

Задача 16.

(a) Докажите, что из сходимости $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ следует сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, но обратное неверно.

(b) Обоснуйте сходимость последовательности x_n, для которой выполнено условие $|x_{n+1} - x_n| \leq 2^{-n}$.

Задача 17. (Теорема Римана) Предположим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, но ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится (в этом случае говорят, что ряд сходится условно). Докажите, что переставляя члены ряда можно получить любую наперед заданную сумму. Возможно ли такое в случае, когда ряд из модулей сходится?

Задача 18. Приведите пример ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ такого, что для всякого числа A существует возрастающая последовательность номеров n_k, для которой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j \Big)$$

сходится к числу A.

Задача 19. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Верно ли, что

(a) сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, (b) сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$?

Задача 20. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Докажите, что найдется такая неубывающая последовательность c_n, что $\lim_{n\to\infty} c_n = +\infty$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n$ сходится.