

## Листок 4.

 **$p$ -адические числа**

Пусть  $p$  – простое число. Если  $a \in \mathbb{Z}$  и  $a = p^k a'$ , где  $m \geq 0$  и  $(a', p) = 1$ , то  $|a|_p = p^{-k}$ . По определению  $|0|_p = 0$  и  $|a/b|_p = |a|_p/|b|_p$ . Поле  $p$ -адических чисел – пополнение поля рациональных чисел  $\mathbb{Q}$  относительно нормы  $|\cdot|_p$ .

Задача 0. Проверьте, что  $|ab|_p = |a|_p|b|_p$  и  $|a+b|_p \leq \max\{|a|_p, |b|_p\}$ . Докажите, что в  $\mathbb{Q}_p$  если два интервала пересекаются, то один является частью другого.

Задача 1. Найдите (а)  $|p!|_p$  (б)  $|n!|_p$ .

Задача 2. Пусть  $r_n$  – фундаментальная (относительно  $|\cdot|_p$ ) последовательность рациональных чисел. Докажите, что  $|r_n|_p \rightarrow 0$  или  $|r_n|_p = |r_N|_p$  для некоторого  $N$  и всех  $n > N$ .

Далее полагаем  $|a|_p = \lim_{n \rightarrow \infty} |r_n|_p$ , где  $r_n$  – последовательность Коши, определяющая  $a \in \mathbb{Q}_p$ .

Задача 3. Докажите, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится в  $\mathbb{Q}_p$  тогда и только тогда, когда последовательность  $|a_n|_p$  стремится к нулю; последовательность  $a_n$  сходится тогда и только тогда, когда  $|a_{n+1} - a_n|_p$  стремится к нулю.

Задача 4. Докажите, что ряды (а)  $\sum_{n=1}^{\infty} p^n$  и (б)  $\sum_{n=1}^{\infty} n!n$  сходятся в  $\mathbb{Q}_p$  и найдите их суммы.

Задача 5. Пусть  $k \in \mathbb{N}$  и  $(k, p) = 1$ . Докажите, что  $a_n = k^{p^n}$  сходится в  $\mathbb{Q}_p$  к некоторому  $\alpha$ . Докажите, что  $\alpha^{p-1} = 1$ .

Задача 6. Пусть  $k \in \mathbb{N}$ . Докажите, что для всякого рационального числа  $a$  с  $|a|_p \leq 1$  найдется единственное целое число  $\alpha_k \in \{0, 1, 2, \dots, p^k - 1\}$  такое, что  $|a - \alpha_k|_p \leq p^{-k}$ . (Указание:  $a = m/n$ , где  $(n, p) = 1$ , и значит  $m = sn + tp^k$  и  $|a - s|_p \leq p^{-k}$ .)

Задача 7. Докажите, что последовательность  $a_n = 1/n$  не сходится в  $\mathbb{Q}_p$ . Докажите, что множество  $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$  всюду плотно в  $\{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \geq 1\}$ .

Задача 8. Докажите, что всякое  $p$ -адическое число  $a$  единственным образом представляется в виде ряда

$$a = c_{-m}p^{-m} + \dots + c_0 + c_1p + c_2p^2 + c_3p^3 + \dots, \quad c_k \in \{0, 1, \dots, p-1\}, a_{-m} \neq 0.$$

Далее по аналогии с бесконечными десятичными дробями, представляющими вещественные числа, записываем  $p$ -адические числа в виде  $\dots c_2c_1c_0, \dots c_{-m}$ . Такая запись называется каноническим  $p$ -адическим разложением числа.

Задача 9. Найдите каноническое разложение

(а) 35 в  $\mathbb{Q}_5$ , (б) 6! в  $\mathbb{Q}_3$ , (с) 1/2 в  $\mathbb{Q}_p$ .

Задача 10.  $p$ -адическое число  $a$  имеет каноническое разложение  $\dots c_2c_1c_0, \dots c_{-m}$ . Найдите каноническое разложение для  $-a$ .

Задача 11. Найдите четыре цифры канонического разложения числа

(а)  $\dots 1246 \times \dots 6003$  в  $\mathbb{Q}_7$ , (б)  $1 : \dots 1323$  в  $\mathbb{Q}_5$ , (с)  $900 - \dots 312, 3$  в  $\mathbb{Q}_{11}$ .

Задача 12. Существуют ли  $\sqrt{6}$  и  $\sqrt{7}$  в  $\mathbb{Q}_5$ ?