Листок 5.

Задача 1. Существует ли метрика на $\mathbb{R}^2$, относительно которой открытый единичный шар с центром в начале координат является внутренностью треугольника, а шар радиуса два с центром в начале координат является внутренностью квадрата.

Задача 2. Придумайте примеры полных метрик на плоскости $\mathbb{R}^2$, таких что

(a) любые два открытых шара с центром в нуле не совпадают с точностью до растяжения в α раз,

(b) два открытых шара с центрами в нуле и единице радиуса 1 не совпадают с точностью до параллельного переноса,

(c) открытый шар с центром в нуле единичного радиуса не является выпуклым множеством.

Задача 3. Всякое ли метрическое пространство из четырех точек можно изометрично (изометрия – отображение, сохраняющее расстояния) вложить в $\mathbb{R}^3$?

Задача 4. Найдите все функции f, для которых множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ является метрическим пространством с метрикой $\varrho(x,y) = |f(x) - f(y)|$. Обязано ли это метрическое пространство быть полным? Всегда ли в этом метрическом пространстве существует счетное всюду плотное множество (т.е. в каждом открытом шаре есть точка этого множества; в этом случае пространство называется сепарабельным)?

Задача 5. Пусть (X, ϱ) является сепарабельным пространством и $Y \subset X$. Докажите, что (Y, ϱ) является сепарабельным пространством.

Задача 6. Функция g определена на $[0, +\infty)$ и является вогнутой, т.е.

$$g(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha g(x) + (1-\alpha) g(y)$$

для всех $x, y \in [0, +\infty)$ и $\alpha \in [0,1]$. Предположим также, что $g(0) = 0$ и $g(x) > 0$ при $x > 0$. Докажите, что для всякой метрики ϱ, функция $g(\varrho)$ является метрикой. Проверьте, что можно в качестве g взять $g(t) = \frac{t}{1+t}$ и $g(t) = \min\{1, t\}$.

Задача 7. Пусть $X = \{0,1\}^n$, $\varrho(x,y) = \sum_j |x_j - y_j|$.

(a) Найдите число элементов в шаре радиуса k.

(b) (код Хэмминга) Рассмотрим следующий способ передачи последовательности из 0 и 1, при котором по полученной последовательности можно исправить ровно одну ошибку, т. е. узнать в каком бите произошла эта ошибка. В последовательности из $2^m - 1$ битов биты с номерами 1, 2, 4, … назовем служебными, а в остальные биты запишем информацию, которую хотим передать. В служебный бит с номером 2^k запишем сумму (по модулю 2) цифр в битах, номера которых в двоичной записи содержат 1 на k-м месте. Тогда сумма цифр в битах (включая служебный), номера которых в двоичной записи содержат 1 на k-м месте, равна нулю. После получения последовательности для каждого k вычисляем сумму цифр в битах, номера которых в двоичной записи содержат 1 на k-м месте. Покажите, что в итоге получается номер бита, при передаче которого произошла ошибка.

(c) Докажите, что при $n = 2^m - 1$ булев куб $X = \{0,1\}^n$ можно представить в виде объединения непересекающихся шаров единичного радиуса, а при других значениях n этого сделать нельзя.

Задача 8.

(a) Докажите, что принцип вложенных шаров является не только необходимым, но и достаточным для полноты метрического пространства.

(b) Покажите, что $\mathbb{N}$ с метрикой $\varrho(m,n) = 1 + \frac{1}{\min\{n,m\}}$ при $n \neq m$ и $\varrho(m,n) = 0$ при $m \neq n$ является полным метрическим пространством. Укажите в этом пространстве последовательность вложенных замкнутых шаров, у которых нет общей точки.

Задача 9. Выясните, какие из следующих последовательностей сходятся в пространстве $B((0,+\infty))$ с равномерной метрикой:

(a) $f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$, (b) $f_n(x)=2^{-nx}$, (c) $f_n(x)=2^{-(x-n)^2}$.

Задача 10. Пусть последовательность многочленов P_n такова, что $\deg P_n \le m$ для всех n и P_n поточечно сходится к некоторой функции f на отрезке $[0;1]$. Докажите, что f является многочленом степени не выше m и последовательность P_n равномерно сходится к f на $[0;1]$.

Задача 11. Докажите, что из последовательности функций $f_n(x)=\sin nx$ на $[0;1]$ нельзя выбрать поточечно сходящуюся подпоследовательность.

Задача 12. Рассмотрим множество X ограниченных функций на $\mathbb{R}$, каждая из которых равна нулю вне некоторого отрезка. Будем говорить, что последовательность $f_n\in X$ сходится к $f\in X$, если существует отрезок, вне которого все f_n и f равны нулю и $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)|\to 0$. Докажите, что не существует метрики, сходимость по которой, равносильна данной сходимости.

Задача 13. С помощью теоремы Банаха о сжимающем отображении докажите, что числовая последовательность $x_{n+1}=f(x_n)$, $x_1=1$, сходится и найдите ее предел, если $f(x)=\sqrt{2+x}$ или $f(x)=2+1/x$.

Задача 14. Постройте пример полного метрического пространства (X,ϱ) и отображения $f\colon X\to X$ таких, что $\varrho(f(x),f(y))<\varrho(x,y)$, но у f нет неподвижной точки.

Задача 15. Существует ли неполное метрическое пространство, в котором всякое сжимающее отображение имеет неподвижную точку?