Листок 6.

Задача 1. Найдите все пары открытых непересекающихся множеств на числовой прямой $\mathbb{R}$, объединение которых равно $\mathbb{R}$.

Задача 2. Постройте пример множества в $\mathbb{R}^2$, которое не является открытым, но пересекается со всякой прямой по открытому множеству.

Задача 3. Можно ли $\mathbb{R}^n$ представить в виде объединения попарно непересекающихся замкнутых шаров положительного радиуса?

Задача 4. Докажите, что всякое открытое множество в $\mathbb{R}^n$ является объединением счетного набора замкнутых множеств, а всякое замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$ является пересечением счетного набора открытых множеств. Приведите пример множества, которое не является объединением конечного или счетного набора замкнутых множеств. Приведите пример множества, которое не является объединением конечного или счетного набора замкнутых множеств и не является пересечением конечного или счетного набора открытых множеств.

Задача 5. Можно ли так занумеровать рациональные числа $\{r_n\}$ в отрезке $[-1,1]$, что интервалы $(r_n - n^{-1}, r_n + n^{-1})$ не покроют $[-1,1]$?

Задача 6. Бесконечное множество $A \subset \mathbb{R}$ таково, что для всяких $x, y \in A$, $x < y$, существует $z \in A$, $x < z < y$. Обязано ли замыкание A содержать внутреннюю точку? Опишите все замкнутые множества, для которых выполняется данное условие.

Задача 7. Пусть (X, ϱ) – метрическое пространство.

(a) Пусть $A \subset X$ и $f(x) = dist(x, A) = \inf\{\varrho(x,y)\colon\ y \in A\}$. Докажите, что

$$|f(x) - f(z)| \le \varrho(x, z).$$

(b) Докажите, что множество нулей непрерывной функции $X \to \mathbb{R}$ является замкнутым множеством и всякое замкнутое множество является множеством нулей некоторой непрерывной функции.

(c) Докажите, что для всяких двух непересекающихся замкнутых множеств существует непрерывная функция, которая равна нулю на одном из них и единице на другом.

Задача 8. (a) Опишите все непрерывные числовые функции на прямой, удовлетворяющие тождеству $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

(b) Существует ли разрывная функция, для которой верно тождество из (a)?

(c) Можно ли в пункте (a) заменить непрерывность монотонностью?

(d) Можно ли в пункте (a) заменить непрерывность ограниченностью f в некоторой окрестности нуля?

Задача 9. Пусть C – множество Кантора и g – функция Кантора. Докажите, что

(a) $g(x+y) \le g(x) + g(y)$,

(b) $\sup_{|x-y|\le\delta} |g(x) - g(y)| = g(\delta)$,

(c) $|g(x) - g(y)| \le |x-y|^{\alpha}$, где $\alpha = \log_3 2$.

Задача 10. Верно ли, что множество в метрическом пространстве компактно тогда и только тогда, когда на нем всякая непрерывная функция ограничена и достигает максимума и минимума?

Задача 11. Пусть $\mathcal{K}$ – все непустые компактные подмножества куба $[0,1]^n$. Докажите, что метрика Хаусдорфа

$$d(A,B) = \max\Big\{\sup_{a\in A} d(a,B), \sup_{b\in B} d(b,A)\Big\}$$

является метрикой на $\mathcal{K}$ и пространство $(\mathcal{K}, d)$ полно.

Задача 12. Пусть $f_j\colon [0,1]^n \to [0,1]^n$, где $j = 1, 2\ldots, m$, – сжимающие отображения. Докажите, что отображение $F\colon \mathcal{K} \to \mathcal{K}$, заданное равенством

$$F(K) = f_1(K) \bigcup f_2(K) \bigcup \ldots \bigcup f_m(K)$$

является сжимающим. Покажите, что канторовское множество является неподвижной точкой отображения F, порожденного функциями $f_1(x) = x/3$ и $f_2(x) = (2+x)/3$.