

Листок 7.

Задача 1. Докажите, что функция Кантора не имеет производной в точках канторовского множества.

Задача 2. Пусть функция f определена в окрестности точки a . Будем говорить, что функция g *касается сверху (снизу)* функции f в точке a , если $f(a) = g(a)$ и существует окрестность $U(a)$, в которой $f(x) \leq g(x)$ ($f(x) \geq g(x)$).

(а) Выясните, можно ли функций $f(x) = |x|$ и $f(x) = x \sin \ln |x|$ при $x \neq 0$, $f(0) = 0$, коснуться сверху (снизу) в точке $a = 0$ дифференцируемой функцией g .

(б) Предположим, что функцию f в точке a можно коснуться сверху и снизу дифференцируемой функцией. Верно ли, что f дифференцируема в точке a ?

Задача 3. Пусть функция f непрерывна на интервале (a, b) . Докажите, что множество точек, в которых функцию f можно коснуться сверху дифференцируемой функцией, является всюду плотным множеством в (a, b) .

Задача 4. Пусть функция f непрерывна на интервале (a, b) и для всякой точки $x \in (a, b)$ из того что дифференцируемая функция g касается сверху функции f в точке x следует неравенство $g'(x) \leq 0$. Докажите, что функция f монотонно не возрастает на (a, b) .

Задача 5. Найдите все (а) дифференцируемые (б) непрерывные функции f на \mathbb{R} , для которых равенство

$$f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

верно для всех x и всех $\lambda > 0$.

Задача 6.

(а) Функция g дважды непрерывно дифференцируема на $[0, 1)$ и

$$g(0) = g'(0) = g''(0) = 0.$$

Докажите, что функция $f(x) = g(|x|)$ дважды непрерывно дифференцируема на интервале $(-1, 1)$.

(б) Известно, что функция f дважды непрерывно дифференцируема при $x \neq 0$ и $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)x^{-2} = 0$. Верно ли, что функция f дважды дифференцируема в нуле?

Задача 7. Докажите, что функция $f(x) = e^{-1/x}$ при $x > 0$ и $f(x) = 0$ при $x \leq 0$ бесконечно дифференцируема на \mathbb{R} .

Задача 8. Пусть $f \in C^\infty(-1, 1)$, f отлична от нуля в любой проколотой окрестности $x = 0$ и $f^{(k)}(0) = 0$ для всякого $k \geq 0$. Докажите, что $\sup_{k,x} |f^{(k)}(x)| = +\infty$.

Задача 9. Найдите значение предела

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(shx) - sh(\sin x)}{x^7}.$$

Задача 10.

(а) Пусть $x = x(t)$ — корень уравнения $x^5 + x = t$. Найдите первые три отличных от нуля члена разложения функции $x(t)$ в точке $t = 0$.

(б) Найдите первые три отличных от нуля члена асимптотики n -ого корня уравнения $tg(x) = x$.

(с) Найдите первые два члена асимптотики последовательности

$$a_{n+1} = \sin a_n, \quad a_1 = 1.$$

Задача 11. Пусть функция f бесконечно дифференцируема и для каждой точки x существует номер n_x такой, что $f^{(n_x)}(x) = 0$. Докажите, что функция является многочленом.

Задача 12. Для произвольной последовательности $\{a_k\}$ докажите, что существует бесконечно дифференцируемая функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такая что $f^{(k)}(0) = a_k$.