

ЭКЗАМЕН ПО ГЕОМЕТРИИ

Разрешается пользоваться любыми материалами, за исключением интернета. Если Вы используете какой-либо источник при решении задач, то, пожалуйста, укажите ссылку. Пункты в некоторых задачах связаны между собой, в некоторых — нет. Решения строго индивидуальные!

1. а) Впишите в додекаэдр пять кубов так, чтобы вершины каждого куба лежали в вершинах додекаэдра, а рёбра куба являлись бы диагоналями граней додекаэдра.

б) Покажите, что всякая изометрия додекаэдра индуцирует перестановку этих пяти кубов.

2. Существует ли отображение области сферы на область евклидовой плоскости, переводящее отрезки сферических прямых в отрезки евклидовых прямых? Ответ обоснуйте.

3. Диагонали сферического четырёхугольника $ABCD$ равны d_1 и d_2 , пересекаются в точке O под углом α и делятся точкой O пополам. Найдите расстояния от точки O до точек пересечения сферических прямых AB и CD .

4. а) Докажите, что все точки евклидовой прямой $y = kx$, лежащие в верхней полуплоскости $y > 0$, равноудалены от гиперболической прямой Oy .

б) Докажите, что если все углы гиперболического многоугольника меньше π , то он выпуклый.

5. а) Докажите, что на плоскости Лобачевского при $\alpha < (n - 2)\pi/n$ существует правильный n -угольник, все углы которого равны α .

б) Докажите, что если a и r — сторона и радиус вписанной окружности правильного n -угольника на плоскости Лобачевского с углом α , то

$$\operatorname{ch} r = \frac{\cos(\alpha/2)}{\sin(\pi/n)}, \quad \operatorname{ch} \frac{a}{2} = \frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\alpha/2)}.$$

в) При каких n существует правильный n -угольник с углом $\alpha = 2\pi/n$?

6. а) Пусть $l(t)$ — семейство прямых $a_1x + b_1y = t(a_2x + b_2y)$ на плоскости xOy , зависящих от параметра t , постоянные a_1, a_2, b_1, b_2 фиксированы. Докажите, что для двойного отношения верно, что

$$\langle l(a), l(b), l(c), l(d) \rangle = \langle a, b, c, d \rangle.$$

б) Пусть AB, BC, CD и AE — четыре прямые общего положения на евклидовой плоскости, причём $D \in AB, E \in BC, G = AE \cap CD$. Пусть H и F — точки пересечения AC с BG и DE соответственно. Докажите, что

$$\langle A, C, H, F \rangle = -1.$$

7. а) Для четырёх плоскостей в \mathbb{E}^3 имеющих общую прямую, двойное отношение определяется как двойное отношение четырёх прямых, полученных при пересечении данных плоскостей произвольной плоскостью. Докажите, что такое определение корректно, т.е. двойное отношение одно и то же для любой секущей плоскости.

б) Докажите, что двойное отношение точек пересечения плоскостей граней тетраэдра с некоторой прямой l равно двойному отношению четырёх плоскостей, проходящих через l и вершины тетраэдра.