Листок 1
ГЕОМЕТРИЯ
Геометрия в смысле Клейна, группы симметрий фигур

Чтобы сдать этот листок необходимо решить хотя бы 5 задач. При этом задачи со звёздочкой приравниваются к двум задачам без звёздочки. В задаче 3 каждый пункт считается за отдельную задачу. Сдавать более двух задач или одной задачи со звёздочкой из задачи 3 не разрешено.

1. Предъявите фигуру, группа симметрий которой изоморфна а) $\mathbb{Z}_2$; б) $\mathbb{Z}_3$; в) $\mathbb{Z}_4$.

2. Существует ли фигура на плоскости, группа симметрий которой изоморфна а) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$; б) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$?

3. Перечислите все элементы (с указанием их порядка) группы симметрий следующих фигур:

а) правильная четырехугольная пирамида;
б) правильный тетраэдр;
в) куб;
г)* додекаэдр (рис.1);
д)* икосаэдр (рис. 2);
е) правильный n-угольник; отдельно рассмотрите случаи четного и нечетного n.

Коммутативны ли эти группы? Перечислите все подгруппы группы симметрий данной фигуры. Из скольких элементов состоит группа движений (т.е. собственных изометрий) данной фигуры?

4. При каких n и m геометрию правильного n-угольника можно вложить в геометрию правильного m-угольника?

5. Пусть G — группа симметрий правильного тетраэдра. Найдите все ее подгруппы порядка 2 и опишите их действие геометрически.

6. Найдите минимальную систему образующих группы симметрий (т.е. минимальное количество симметрий, композициями которых являются все остальные симметрии):
а) правильного тетраэдра;
б) куба.

7. Опишите фундаментальные области группы симметрий:
а) куба;
б) икосаэдра;
в) правильного тетраэдра.

8. Покажите, что композиция двух отражений сферы относительно плоскостей, проходящих через ее центр, является поворотом. Найдите ось этого поворота и, если дан угол между плоскостями, угол поворота.

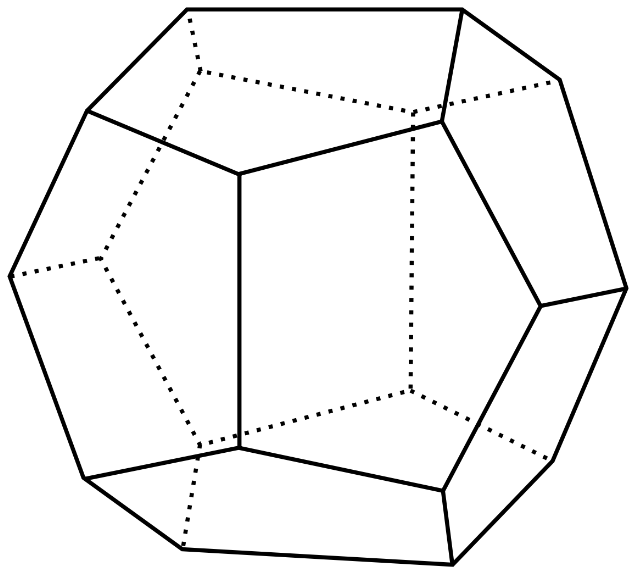

Рис. 1. Додекадр.

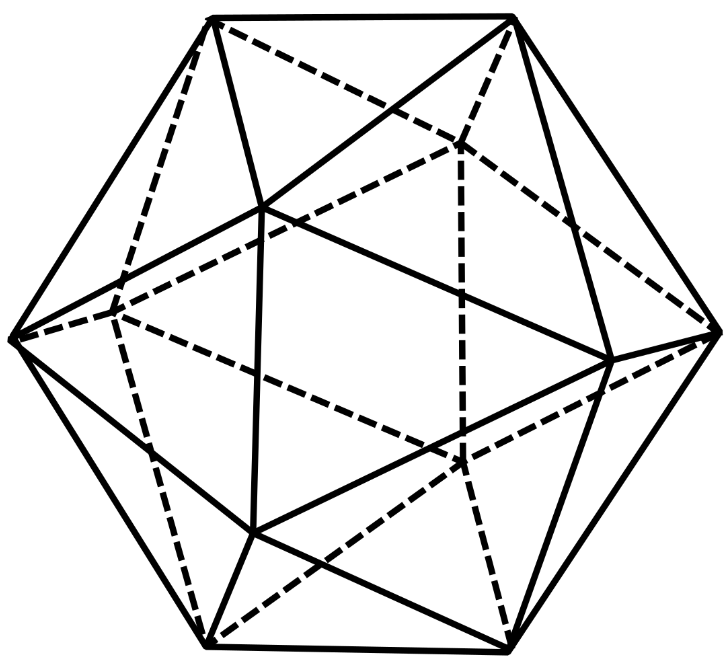

Рис. 2. Икосаэдр.