Листок 3
ГЕОМЕТРИЯ
Калейдоскопы или геометрии Кокстера

Чтобы сдать этот листок необходимо решить хотя бы 4 задачи. Если в задаче есть несколько пунктов, то для того, чтобы её сдать нужно решить все пункты.

1. Три прямые L_1, L_2, L_3 на евклидовой плоскости образуют треугольник с (внутренними) углами α, β и γ.
а) При каких условиях на α, β, γ отражения от трех данных прямых порождают дискретную группу?
б) Если эти условия выполнены, как найти фундаментальную область такого действия?

2. Даны три плоскости P_1, P_2, P_3, содержащие ось z евклидова пространства $\mathbb{R}^3$. Углы между P_1 и P_2, а также между P_2 и P_3 равны, соответственно, α и β.
а) При каких условиях на α и β отражения от данных трех плоскостей порождают конечную группу?
б) Если эти условия выполнены, как найти фундаментальную область такого действия?

3. Нарисуйте схемы Кокстера
а) для всех треугольников Кокстера;
б) для всех трехмерных многогранников Кокстера.

4. Опишите какой-либо четырехмерный многогранник Кокстера, отличный от четырехмерного куба.

5. а) Определяет ли геометрию Кокстера группа преобразований, порожденная отражениями от граней правильного тетраэдра?
б) Тот же вопрос для куба.
в) Тот же вопрос для октаэдра.
г) Тот же вопрос для додекаэдра.

6. Докажите, что если из вершины многогранника $\mathcal{P}$ в $\mathbb{E}^3$ выходит q рёбер, то сумма двугранных углов при этих рёбрах больше, что $\pi(q-2)$. Выведите отсюда, что если двугранные углы многогранника $\mathcal{P}$ не превосходят $\pi/2$, то из каждой его вершины исходят только три ребра, причём сумма двугранных углов при них больше π.

7 (требует знание линейной алгебры). Пусть $\mathcal{P}$ — тетраэдр (не обязательно правильный). Занумеруем как-нибудь его грани. Обозначим через $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ двугранный угол между i и j гранями. Докажите, что α_{ij} удовлетворяют следующему соотношению

$$\begin{vmatrix} 1 & -\cos\alpha_{12} & -\cos\alpha_{13} & -\cos\alpha_{14} \\ -\cos\alpha_{12} & 1 & -\cos\alpha_{23} & -\cos\alpha_{24} \\ -\cos\alpha_{13} & -\cos\alpha_{23} & 1 & -\cos\alpha_{34} \\ -\cos\alpha_{14} & -\cos\alpha_{24} & -\cos\alpha_{34} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

8. Докажите, что есть только 3 тетраэдра Кокстера в $\mathbb{E}^3$. Докажите, что всего есть 7 многогранников Кокстера в $\mathbb{E}^3$.

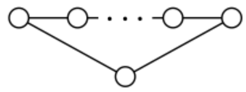
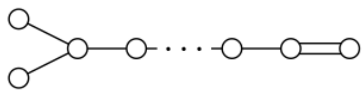
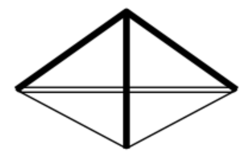
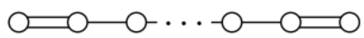
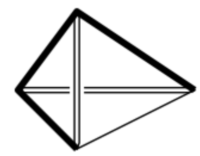
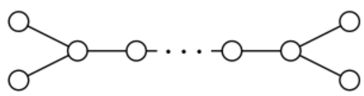
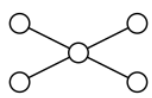
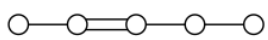
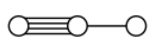
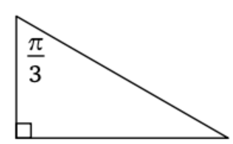
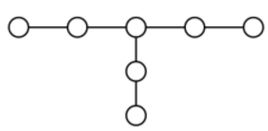
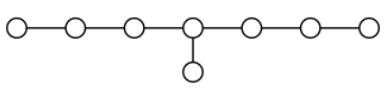
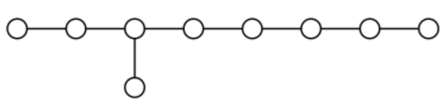
Название	Схема Кокстера	Размерность	Количество граней	Реализация в $\mathbb{R}^n$, $n \leqslant 3$
$\widetilde{A}_1$		1	2	
$\widetilde{A}_n$		$n-1$	n	
$\widetilde{B}_n$		$n-1$	n	
$\widetilde{C}_n$		$n-1$	n	
$\widetilde{D}_n$		$n-1$	$n \geqslant 5$	нет
$\widetilde{D}_4$		4	5	нет
$\widetilde{F}_4$		4	5	нет
$\widetilde{G}_2$		2	3	
$\widetilde{E}_6$				нет
$\widetilde{E}_7$				нет
$\widetilde{E}_8$				нет

Рис. 1. Схемы Кокстера для геометрий Кокстера.