

Листок 4
ГЕОМЕТРИЯ

Замощения (геометрии Фёдорова)

Чтобы сдать этот листок необходимо решить хотя бы 4 задачи. Если в задаче есть несколько пунктов, то для того, чтобы её сдать нужно решить все пункты. Схемы семнадцати фёдоровских групп находятся на страничке курса (pdf "Замощения"), а также в книге А. Б. Сосинского на стр. 88

1. Докажите, что любая изометрия плоскости, не сохраняющая ориентацию, есть скользящая симметрия относительно некоторой прямой L с параллельным ей вектором сдвига \vec{u} (возможно, нулевым).

2. (а) Докажите, что композицию двух поворотов $r = (a, \varphi)$ и $s = (b, \psi)$ можно построить следующим образом. Соединим точки a и b , повернем луч $[a, b)$ вокруг a на угол $-\varphi/2$, повернем луч $[b, a)$ вокруг b на угол $\psi/2$ и обозначим через c точку пересечения двух полученных лучей; тогда c является центром композиции $r * s$, а ее угол поворота равен $2(\pi - \varphi/2 - \psi/2)$. Покажите, что такое построение невозможно в частном случае, когда углы поворотов равны, но противоположно ориентированы, и тогда их композиция — параллельный перенос.

(б) Докажите, что композиция поворота и параллельного переноса — поворот на тот же угол, и найдите его центр.

(в) Докажите, что композиция двух отражений от прямых l_1 и l_2 — поворот вокруг точки пересечения этих прямых на угол, вдвое больший ориентированного от l_1 к l_2 .

3. Дайте полное доказательство теоремы Фёдорова для односторонних геометрий замощения Фёдорова.

4. (а) Верно ли, что группа преобразований замощения, показанного на рис. 1 (б), является подгруппой группы преобразований для рис. 1 (в)?

(б) Укажите точки, которые являются центрами поворотов из группы преобразований замощения, показанного на рис. 1 (в).

(в) Переставьте вопросительные знаки в замощении в) на рис. 1 так, чтобы получилась геометрия, изоморфная случаю замощения а).

5. Какими платоновыми телами можно заполнить трехмерное евклидово пространство (без перекрытий)?

6. Укажите, каким из семнадцати фёдоровских групп соответствуют картины Эшера на рис. 2.

7. (а) Ровно одна из семнадцати фёдоровских групп содержит скользящую симметрию, но не содержит отражений. Какая это группа?

(б) Какие две из семнадцати фёдоровских групп содержат поворот на угол $\pi/6$?

(в) Какие три из семнадцати фёдоровских групп содержат поворот на угол $\pi/2$?

(г) Какие пять из семнадцати фёдоровских групп содержат поворот лишь на угол π ?

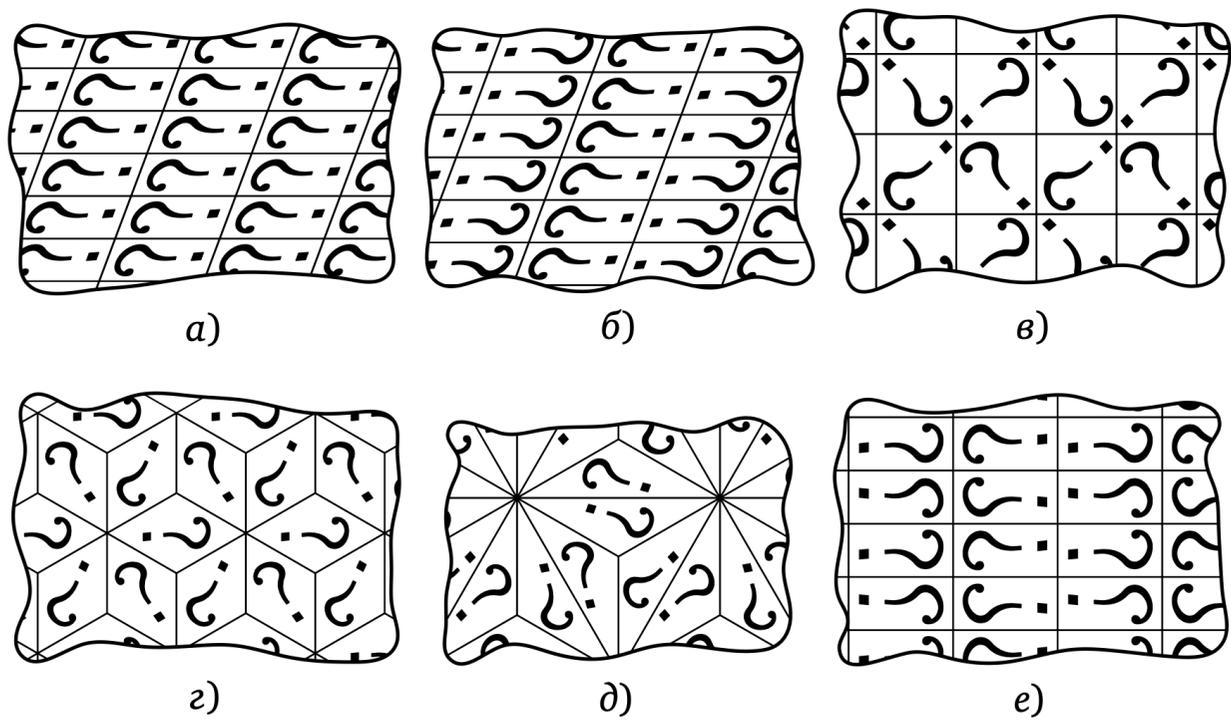


Рис. 1. Шесть правильных замощений плоскости.

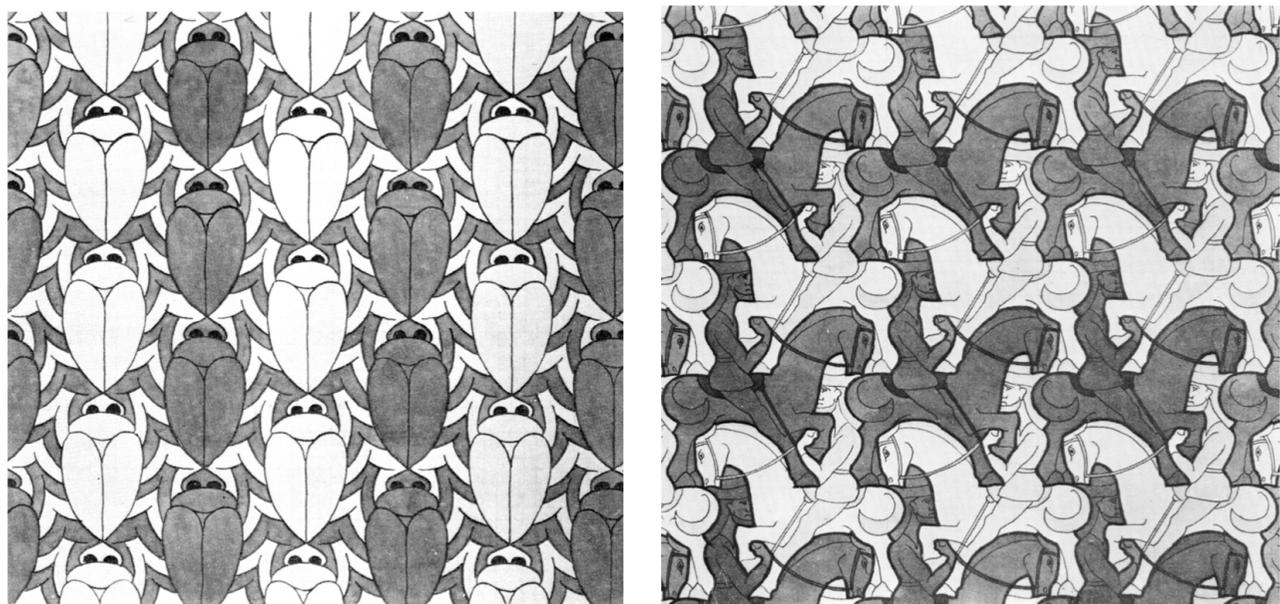


Рис. 2. Картины Эшера.