Листок 5

ГЕОМЕТРИЯ

Сферическая геометрия

Чтобы сдать этот листок необходимо решить хотя бы 5 задач. Если в задаче есть несколько пунктов, то для того, чтобы её сдать нужно решить все пункты. Задача со звездочкой приравнивается к двум задачам без звездочки. Во всех задачах этого листка a, b, c — стороны, α, β, γ — противолежащие им углы сферического треугольника. Радиус сферы $\mathbb{S}^2$ равен 1.

1. (а) Докажите первую теорему косинусов для сферы $\mathbb{S}^2$: $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$.
(б) Докажите вторую теорему косинусов для сферы $\mathbb{S}^2$: $\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$.

2. Докажите, что в сферическом треугольнике с прямым углом γ выполняются соотношения $\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} \alpha \sin b$, и $\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} c \cos b$.

3. Докажите, что

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b \sin c}}, \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-a)}{\sin b \sin c}},$$

где $p = (a+b+c)/2$.

4. (а) Докажите, что $a + b + c < 2\pi$.
(б) Найдите точную нижнюю и точную верхнюю грань суммы углов равностороннего треугольника на сфере.

5*. Найдите площадь сферического круга радиуса r (т.е. области, которая ограничена сферической окружностью радиуса r).

6. (а) Докажите что сферическая окружность является также и евклидовой окружностью. Равны ли радиусы этих окружностей, т.е. совпадает ли сферический радиус сферической окружности с евклидовым радиусом евклидовой окружности?
(б) Докажите, что любой сферический треугольник имеет описанную и вписанную окружности.

7*. Докажите, что радиус r вписанной окружности и радиус R описанной окружности сферического треугольника удовлетворяют

$$\operatorname{tg} r = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}}, \quad \operatorname{ctg} R = \sqrt{\frac{\sin(\alpha-s)\sin(\beta-s)\sin(\gamma-s)}{\sin s}},$$

где $s = (a+b+c-\pi)/2$.

8. (а) Докажите, что медианы сферического треугольника пересекаются в одной точке.
(б) Докажите, что высоты сферического треугольника всегда пересекаются в одной точке.
(в) Верна ли в сферической геометрии теорема Пифагора в виде "сумма квадратов катетов прямоугольного треугольника равна квадрату гипотенузы"?

9. Пусть медианы и высоты сферического треугольника пересекаются в точках M и H соответственно. Может ли оказаться, что $M = H$?

10. (а) Рассмотрим отрезок сферической прямой длины α. Рассмотрим полюсы всех сферических прямых, пересекающих данный отрезок. Докажите, что рассматриваемые точки заметают множество площади 4α.
(б) Дано несколько отрезков сферических прямых, сумма длин которых меньше π. Докажите, что существует сферическая прямая, не пересекающая ни одного из данных отрезков.

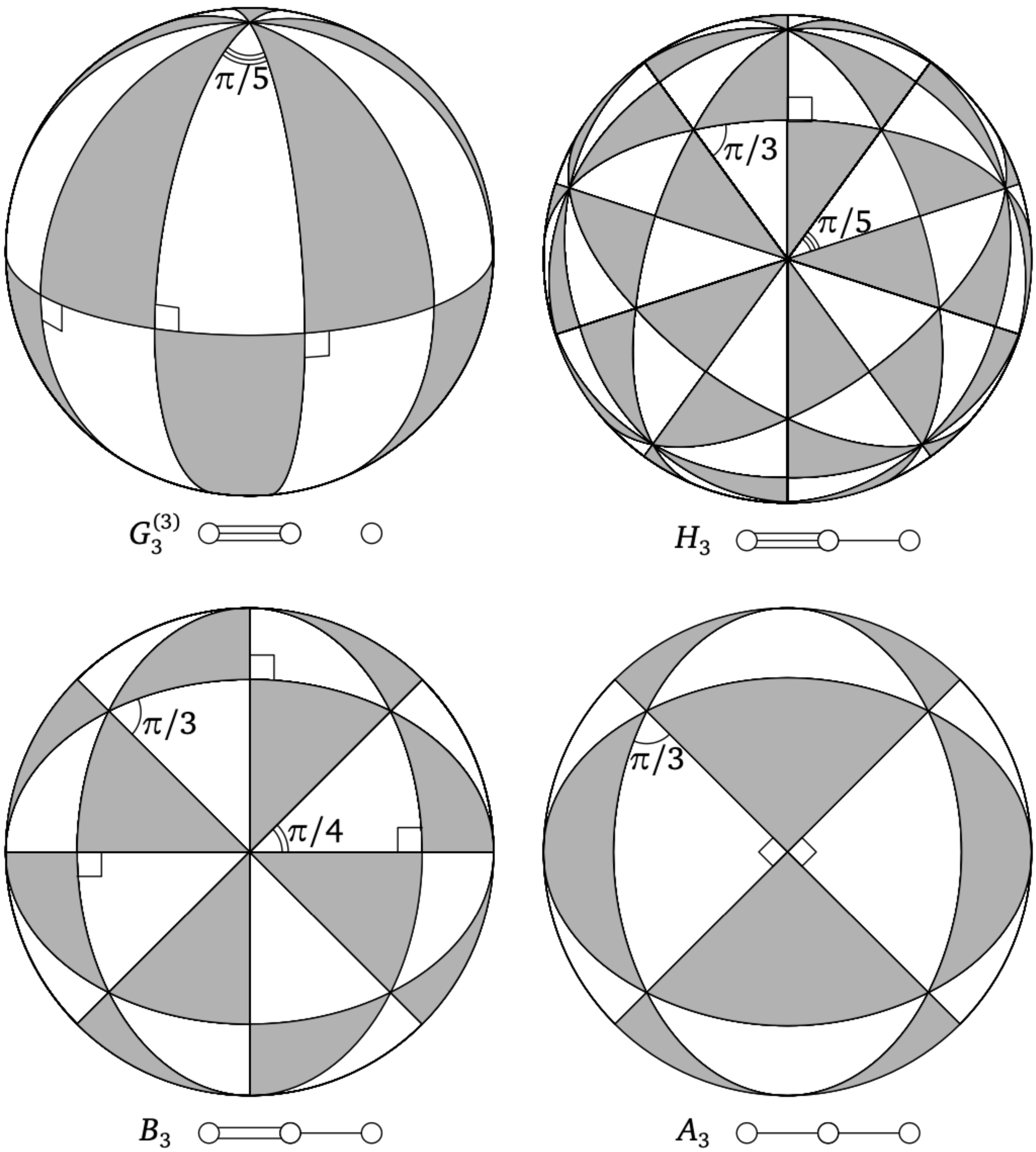

Рис. 1. Четыре замощения Кокстера на сфере.