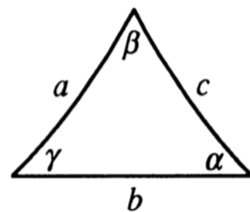


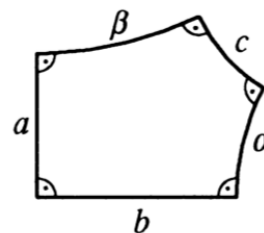
Листок 8
ГЕОМЕТРИЯ

Модель Кэли—Клейна, гиперболическая тригонометрия

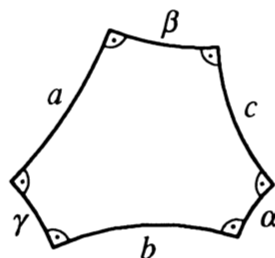
Чтобы сдать этот листок необходимо решить хотя бы 7 задач. Если в задаче есть несколько пунктов, то для того, чтобы её сдать нужно решить все пункты. Задачи со звёздочкой приравняются к двум задачам без звёздочки. Везде в задачах приняты соглашения по обозначениям, показанные на рисунках а)-в).



а)



б)



в)

1. а) Докажите, что в модели Кэли—Клейна для трех точек A, B, C , лежащих на одной прямой так, что B находится между A и C , выполнено равенство $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$.
б) Докажите, что из равенства $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$ вытекает, что точки A, B, C лежат на одной прямой и B лежит между A и C .
2. Докажите, что отражение от прямой в модели Кэли—Клейна является инволюцией.
3. Покажите, что понятие перпендикулярных прямых в модели Кэли—Клейна корректно определено (т.е. не зависит от порядка, в котором указаны две прямые).
- 4.* Докажите, что сумма углов треугольника в модели Кэли—Клейна меньше π , исходя непосредственно из определений, относящихся к модели.
5. В модели Кэли—Клейна постройте треугольник с суммой углов, меньшей чем заданное положительное ε .
6. Докажите, что стереографическая проекция конформна (т.е. сохраняет угловую меру).
7. а) Докажите гиперболическую теорему синусов.
б) Докажите гиперболическую теорему косинусов.
8. а) Докажите, что в гиперболической геометрии конгруэнтны любые два треугольника, стороны которых соответственно равны.
б) Докажите, что в гиперболической геометрии конгруэнтны любые два треугольника, у которых равен угол и соответственно равны его стороны.

9. Покажите, что в гиперболической геометрии гомотетия не конформна.

10. Докажите, что в треугольнике с прямым углом γ стороны a, b, c и противоположные им углы $\alpha, \beta, \gamma = \pi/2$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} a &= \operatorname{sh} c \sin \alpha; & \operatorname{th} b &= \operatorname{th} c \cos \alpha; \\ \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta &= \operatorname{ch} c; & \cos \alpha &= \operatorname{ch} a \sin \beta. \end{aligned}$$

Что происходит с этими соотношениями, когда a, b, c становятся очень малыми?

11. Докажите, что три а) биссектрисы, б) медианы, в) высоты гиперболического треугольника пересекаются в одной точке.

12. *Гиперболическая теорема Менелая* Пусть прямая l пересекает прямые BC, CA, AB (содержащие стороны треугольника ABC) в точках A_1, B_1, C_1 соответственно; тогда

$$\frac{\operatorname{sh} |AC_1|}{\operatorname{sh} |C_1B|} \cdot \frac{\operatorname{sh} |BA_1|}{\operatorname{sh} |A_1C|} \cdot \frac{\operatorname{sh} |CB_1|}{\operatorname{sh} |B_1A|} = 1.$$

13. Докажите, что для прямоугольного пятиугольника верны следующие соотношения

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b; \quad \operatorname{ch} c = \operatorname{cth} \alpha \operatorname{cth} \beta.$$

14. Докажите, что для прямоугольного шестиугольника верны следующие соотношения

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \operatorname{ch} \gamma - \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b; \quad \frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{sh} \alpha} = \frac{\operatorname{sh} b}{\operatorname{sh} \beta} = \frac{\operatorname{sh} c}{\operatorname{sh} \gamma}; \quad \operatorname{cth} \alpha \operatorname{sh} \gamma = \operatorname{ch} \gamma \operatorname{ch} b - \operatorname{cth} a \operatorname{sh} b.$$