Листок 9
ГЕОМЕТРИЯ
Проективная геометрия-I

Чтобы сдать этот листок необходимо решить хотя бы 5 задач. Если в задаче есть несколько пунктов, то для того, чтобы её сдать нужно решить все пункты. Задачи со звёздочкой приравниваются к двум задачам без звёздочки.

1. Докажите, что двойное отношение четырех коллинеарных точек инвариантно при проективных преобразованиях.

2. Четыре плоскости проходят через общую прямую l, а прямая m пересекает все четыре плоскости. Докажите, что двойное отношение точек пересечения прямой m с этими плоскостями не зависит от выбора m.

3. Вычислите двойное отношение четырех точек $(x_i : y_i : 0), i = 1, 2, 3, 4$, лежащих на бесконечно удаленной прямой Λ_∞.

4. a) Сформулируйте и докажите теорему, двойственную к теореме Паппа. Сделайте соответствующий чертеж.
b) Сформулируйте и докажите теорему, двойственную к теореме Дезарга. Сделайте соответствующий чертеж.

5*. Докажите, что проективная двойственность переводит любую точку коники в прямую, касательную к двойственной конике.

6. Используя предыдущую задачу, сформулируйте и докажите теорему, двойственную к теореме Паскаля (она известна как *теорема Брианшона*). Сделайте соответствующий чертеж. Задачу можно сдавать вне зависимости от того, сдали ли Вы предыдущую задачу.

7. В пространстве $\mathbb{R}^3$ даны три скрещивающиеся прямые l, l_1, l_2. Каждой точке $A_1 \in l_1$ поставим в соответствие точку A_2, в которой прямая l_2 пересекает плоскость, содержащую A_1 и l. Докажите, что соответствие $A_1 \mapsto A_2$ является проективным отображением прямой l_1 на l_2.

8. На плоскости дан многоугольник $A_1 \dots A_n$. При движении точек $A_1, \dots, A_{n-1}$ вдоль некоторых прямых $l_1, \dots, l_{n-1}$ соответственно оказалось, что прямые, содержащие стороны многоугольника, проходят через неподвижные точки $O_1, \dots, O_n$, лежащие на одной прямой. Докажите, что точка A_n при этом также движется вдоль некоторой прямой.

9. Докажите неравенство треугольника для гиперболической метрики, используя подходящие проективные преобразования.

10. Докажите евклидов вариант теоремы Паскаля для случая окружности.