Модули над коммутативными кольцами. Абелевы группы.

Задача 1. Пусть $\chi_A(t) = t^n + \sigma_1 t^{n-1} + \cdots + \sigma_{n-1}t + \sigma_n$ — характеристический многочлен матрицы $A \in \mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$. Покажите, что $(-1)^k\sigma_k$ равен сумме всех главных миноров порядка k.

Задача 2*. Покажите, что ранг свободного подмодуля свободного модуля не превосходит ранг исходного модуля.

Задача 3. Напишите каноническое разложение для следующих абелевых групп:

а) все абелевы группы порядка 36; **б)** $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(\mathbb{Z}/(p^n\mathbb{Z}), \mathbb{Z}/(p^m\mathbb{Z})\big)$ при $m, n \geqslant 0$;

в) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(\mathbb{Z}/(n\mathbb{Z}), \mathbb{Z}/(m\mathbb{Z})\big)$ для взаимно простых m и n; **г)** $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(\mathbb{Z}/(n\mathbb{Z}), \mathbb{Z}/(m\mathbb{Z})\big)$ для произвольных m и n;

Задача 4. Напишите каноническое разложение для фактора решётки $\mathbb{Z}^3$ по подрешётке, порождённой векторами: **а)** $(7,2,3)$, $(21,8,0)$, $(5,-4,3)$; **б)** $(4,5,3)$, $(5,6,5)$, $(8,7,9)$;

в) $(2,-4,6)$, $(6,-6,10)$, $(2,5,8)$, $(6,0,5)$; **г)** $(-81,-6,-33)$, $(60,6,24)$, $(-3,6,-3)$, $(18,6,6)$;

д) $(-62,-8,-26)$, $(40,10,16)$, $(22,-8,10)$, $(20,2,8)$.

Задача 5. В абелевой группе, порождённой элементами a_1, a_2, a_3, найдите порядок элемента

а) $a_1 + 2a_3$, если $a_1 + a_2 + 4a_3 = 2a_2 - a_2 + 2a_3 = 0$;

б) $32a_1 + 31a_3$, если $2a_1 + a_2 - 50a_3 = 4a_1 + 5a_2 + 60a_3 = 0$.

Задача 6. У абелевой группы $\mathbb{Z}/(3\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}/(5\mathbb{Z}) \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/(31\mathbb{Z})$ найдите **а)** минимально возможное число образующих абелевой группы; **б)** максимальную циклическую подгруппу.

Задача 7. **а)** Приведите пример бесконечнопорождённого неразложимого $\mathbb{Z}$-модуля, **б)** не содержащего свободных подмодулей.

Задача 8. Пусть порядок конечно порождённой абелевой группы N делится на m. Докажите, что в N есть подгруппа порядка m. Верно ли, что в N есть элемент порядка m?

Задача 9. Пусть A, B и C — такие конечно порождённые модули над кольцом главных идеалов, что $A \oplus C \cong B \oplus C$. Верно ли, что $A \cong B$?

Задача 10. **а)** Докажите, что площадь параллелограмма с целочисленными вершинами равен $1 + n_0 + \frac{n_1}{2}$, где n_0 — количество вершин строго внутри параллелограмма, а n_1 — количество вершин строго внутри его рёбер.

б) Докажите, что объём k-мерного параллелепипеда с целочисленными вершинами равен
$$1 + n_0 + \frac{n_1}{2} + \ldots + \frac{n_{k-1}}{2^{k-1}},$$
где n_0 — количество вершин строго внутри самого параллелепипеда, n_i — количество вершин строго внутри $(k-i)$-мерных граней параллелепипеда.

Задача 11*. Докажите, что при $n \geqslant 3$ мультипликативная группа обратимых вычетов в $\mathbb{Z}/(2^n\mathbb{Z})$ изоморфна $\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}/(2^{n-2}\mathbb{Z})$.

Последовательность $\cdots \to N_i \to N_{i-1} \to \cdots$ абелевых групп называется *точной*, если образ входящей стрелки совпадает с ядром исходящей.

Задача 12. Опишите все абелевы группы M, которые вписываются в точную последовательность
$$0 \to \mathbb{Z}/(6\mathbb{Z}) \to M \to \mathbb{Z}/(10\mathbb{Z}) \to 0.$$