Факториальность, идеалы.

Задача 1. а) Пусть $q(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$. Рассмотрим редукцию q по модулю p, а именно, $\tilde{q}(x) \in \mathbb{F}_p[x]$: $\tilde{q}(x) = x^n + [a_{n-1}]x^{n-1} + \cdots + [a_0]$. Докажите, что если $\tilde{q}(x)$ неприводим, то $q(x)$ неприводим.

б) Докажите, что многочлен $x^{178} + \cdots + x + 1$ неприводим в $\mathbb{Q}[x]$.

в) Докажите, что многочлен $x^4 + 1$ неприводим в $\mathbb{Q}[x]$, но приводим по модулю любого простого p.

г) Пусть $I \subseteq R$ — собственный идеал в кольце без делителей нуля, и пусть $p(x) \in R[x]$ — непостоянный многочлен со страшим коэффициентом равным единицей. Покажите, что если образ $p(x)$ в $(R/I)[x]$ неприводим, то $p(x)$ неприводим в $R[x]$.

д) Покажите, что $x^2 + xy + 1$ неприводим в $\mathbb{Z}[x, y]$.

Задача 2. Покажите, что если многочлен $p(x_1, \ldots, x_n) \in \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ над бесконечным полем $\Bbbk$ обращается в нуль во всех точках гиперплоскости $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b = 0$, то он делится на $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b$.

а) Разложите на множители многочлен $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

Задача 3. Пусть $\Bbbk$ — коммутативное кольцо с единицей, и X — произвольное множество. **а)** Введите структуру коммутативного кольца с единицей на множестве $\Bbbk^X$ функций $X \to \Bbbk$.

б) С отображением множеств $\varphi\colon X \to Y$ связан гомоморфизм колец (почему?) $\varphi^*\colon \Bbbk^Y \to \Bbbk^X$ заданный композицией с φ. Опишите его ядро.

Задача 4. Пусть $C_{[0,1]} \subseteq \mathbb{R}^{[0,1]}$ — кольцо непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$.

а) Покажите, что отображение $\varphi\colon [0, 1] \to [0, 1]$ непрерывно, если и только если $\varphi^*(C_{[0,1]}) \subseteq C_{[0,1]}$.

б) Непрерывное отображение $\varphi\colon [0, 1] \to [0, 1]$ сюръективно тогда и только тогда, когда отображение $\varphi^*\colon C_{[0,1]} \to C_{[0,1]}$ инъевтивно.

В случае, когда $X = \{*\}$, индуцированный вложением $* \hookrightarrow Y$ гомоморфизм $\Bbbk^Y \to \Bbbk^X \cong \Bbbk$ называется гоморфизмом вычисления:

$$\mathrm{ev}_y\colon \Bbbk^Y \xrightarrow{f \mapsto f(y)} \Bbbk.$$

Пусть R — содержащее $\Bbbk$ в качестве подкольца. Назовём $\Bbbk$-точками кольца R гомоморфизмы $R \to \Bbbk$, которые тождественно действуют на $\Bbbk$.

в) Постройте биекцию между точками отрезка $[0, 1]$ и $\mathbb{R}$-точками кольца непрерывных функций $C_{[0,1]}$.

Задача 5. Пусть $R = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]/(p_1, \ldots, p_r)$ — факторкольцо по идеалу порождённому набором многочленов $p_1, \ldots, p_r$.

а) Для поля $L \supseteq \Bbbk$, покажите, что L-точка кольца R определяет решение системы уравнений

$$p_1(x_1, \ldots, x_n) = \cdots = p_r(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

в поле L.

Скажем, что два решения $s_1\colon R \to L$, $s_2\colon R \to L$ эквивалентны, если существует такое вложение полей $\iota\colon L_1 \hookrightarrow L_2$, что $s_2 = \iota s_1$.

б) Докажите, что множество решений системы выше по всевозможным полям L находится во взаимно однозначном соответствии с множеством $\mathrm{Spec}(R)$ простых идеалов кольца R.