Модули и векторные пространства.

Задача 1. Является ли $\mathbb{Z}$-подмодуль в $\mathbb{Z}[x]$, состоящий из всех многочленов с чётным свободным членом **а)** конечно порождённым; **б)** свободным; **в)** отщепимым[1]?

Задача 2. Является ли $\mathbb{Z}$-модуль **а)** $\mathbb{Z}^n$; **б)** $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^k$ неразложимым? Если модуль разложим, то разложите его в сумму неразложимых.

Задача 3*. **а)** Пусть $R = \{f \in C_{[0,1]} \mid f(0) = f(1)\}$, и пусть $M = \{f \in C_{[0,1]} \mid f(0) = -f(1)\}$. Покажите, что M и R суть неразложимые R-модули.

б) Покажите, что $M \oplus M \cong R \oplus R$.

в) Докажите, что $R = \mathbb{R}[x, y]/(x^2 + y^2 - 1)$ имеет два различных разложения на неразложимые подмодули как R-модуль.

Задача 4. Верно ли, что подмодуль свободного модуля свободен?

Задача 5. Выясните, являются ли линейно зависимыми наборы векторов:
а) $e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$; **б)** $1, \sin x, \cos x, \dots, \sin(nx), \cos(nx)$; **в)** $x^{\lambda_1}, \dots, x^{\lambda_n}$ в векторном пространстве функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Здесь $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ и $\lambda_i \in \mathbb{R}$ различны.

г) $x, x^2, \dots, x^{p+1}$; **д)** $x, x^p, x^{p^2}, \dots, x^{p^p}$ в векторном пространстве функций $f\colon \mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p$;

е) $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 1, 2)$, $e_3 = (1, 2, 3)$ в $\mathbb{R}^3$?

Задача 6. Может ли поле из 27 элементов содержать подполе из 9 элементов?

Задача 7. Найдите размерность пространства **а)** многочленов степени не превосходящей n от k переменных;

б) однородных многочленов степени n от k переменных;

в) многочленов с вещественными коэффициентами степени не больше n, обращающихся в нуль в точке $3 - 2i$;

г) $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$; **д)** $\Bbbk[[t]]$, где $\Bbbk$ — не более чем счётное поле; **е)** $\mathbb{R}$ над $\mathbb{Q}$.

Задача 8. Образуют ли базис в пространстве $\mathbb{Q}[x]_{\leqslant n}$ многочленов степени не больше n многочлены **а)** $(x - k)^n$; **б)** $\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}$, где $0 \leqslant k \leqslant n$.

Задача 9. Приведите пример конечномерного пространства M и трёх таких попарно непересекающихся подпространств U, V, W, что $\dim U + \dim V + \dim W = \dim M$, но $M \ncong U \oplus V \oplus W$.

Задача 10. Пусть $\dim(U+V) = \dim(U \cap V) + 1$ для некоторых подпространств $U, V \subseteq W$. Обязательно ли $U \cap V$ равно одному из подпространств U, V, а $U + V$ — другому?

Задача 11. **а)** Докажите, что для трех подпространств U, V, W векторного пространства выполняется равенство

$$(U + V) \cap (V + W) \cap (W + U) = (U + W) \cap V + (U + V) \cap W.$$

б) Докажите, что

$$(U \cap V) + (V \cap W) + (W \cap U) \subseteq (U + V) \cap (V + W) \cap (W + U),$$

и, если U, V и W конечномерны, разность размерностей в левой и правой частях чётна.

в) Приведите два примера, когда включение из предыдущего пункта строгое.

[1] подмодуль N модуля M называется отщепимым, если существует подмодуль N' такой, что $M = N \oplus N'$.

Задача 12. Обозначим через $S(X)$ множество всех подмножеств множества X. Покажите, что $S(X)$ является векторным пространством над полем $\mathbb{F}_2$ относительно операций

$$
\begin{aligned}
X + Y &\coloneqq X \cup Y \setminus (X \cap Y)\\
1 \cdot X &\coloneqq X\\
0 \cdot X &\coloneqq \varnothing
\end{aligned}
$$

Если $|X| = n$, найдите размерность и базис $S(X)$.

Задача 13. Сколько всего имеется в n-мерном векторном пространстве над конечным полем из q элементов **а)** векторов; **б)** упорядоченных наборов из k линейно независимых векторов; **в)** k-мерных векторных подпространств?

Задача 14. Пусть $\binom{n}{k}_q$ — число k-мерных векторных подпространств в $\mathbb{F}_q^n$. Найдите $\lim_{q\to 1} \binom{n}{k}_q$.