Линейные операторы и матрицы, метод Гаусса.

Задача 1. а) Найдите базис суммы и пересечения подпространств $\mathbb{Q}^5$

$$U = \mathrm{span}\langle (2,1,0,3,0),(3,1,0,2,0)\rangle, \quad V = \mathrm{span}\langle (1,1,1,1,1),(2,3,1,4,1),(3,4,2,5,2)\rangle.$$

б) Найдите базис линейной оболочки строк и столбцов матрицы и её ранг: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

в) Выясните, является ли сумма подпространств $U, V \subset \mathbb{Q}^4$ прямой, и, если да, найдите проекции стандартных базисных векторов $\mathbb{Q}^4$ на каждое из подпространств вдоль другого, где

$$U = \mathrm{span}\langle (1,1,1,1),(-1,-2,0,1)\rangle, \quad V = \mathrm{span}\langle (-1,-1,1,-1),(2,2,0,1)\rangle.$$

г) Найдите матрицу обратную к $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Задача 2. Напишите матрицу линейного отображения D из векторного пространства многочленов степени не выше n в себя в базисе $1, x, \ldots, x^n$ если **а)** D — оператор дифференцирования $\frac{d}{dx}$;

б) D — оператор сдвига $D_a\colon f(x) \mapsto f(x+a)$.

в) Покажите, что произведение матриц операторов сдвига D_a и D_b на числа a и b есть матрица сдвига на сумму D_{a+b}.

Задача 3. Напишите матрицы поворота вокруг прямых, натянутых на стандартный базис $\mathbb{R}^3$, в этом же базисе.

Задача 4. Назовем два набора подпространств $(V_1, \ldots, V_k)$, $(V_1', \ldots, V_k')$ в заданном n-мерном пространстве V *эквивалентными*, если существует такой изоморфизм $A\colon V \to V$, что $A(V_i) = V_i'$.

а) Докажите, что числа $d_{i_1 \ldots i_s} := \dim V_{i_1} \cap \cdots \cap V_{i_s}$ являются инвариантами (то есть одинаковы у эквивалентных наборов).

б) Существуют ли ещё инварианты принадлежащие $\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$? Например, является ли инвариантом $\dim (V_1 + V_2)/(V_1 \cap V_2)$? Выражается ли он через уже описанные?

Существует ли конечное число инвариантов однозначно определяющих набор из **в)** одного; **г)** двух; **д*)** трёх подпространств с точностью до эквивалентности? Если да, то предъявите набор инвариантов явно.

Задача 5. Покажите, что у любой матрицы $M_{n\times m}(\Bbbk)$ размерность линейной оболочки её строк в $\Bbbk^n$ равна размерности линейной оболочки её столбцов в $\Bbbk^m$.

Задача 6. Покажите, что каждая матрица ранга 1 **а)** является произведением столбца на строку; **б)** пропорциональна своему квадрату, если она квадратная.

Задача 7. Докажите, что для любых матриц $A \in Mat_{n\times l}, B \in Mat_{l\times k}, C \in Mat_{k\times m}$ выполнены следующие неравенства:

а) $\mathrm{rk}(AB) \leqslant min(\mathrm{rk}\, A, \mathrm{rk}\, B)$; **б)** $\mathrm{rk}(AB) + \mathrm{rk}(BC) \leqslant \mathrm{rk}(ABC) + \mathrm{rk}(B)$; **в)** $\mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(B) \leqslant rk(AB) + l$.

Задача 8. Есть 7 одинаковых банок, каждая на $9/10$ заполнена краской одного из семи цветов радуги. Можно ли переливая краску из банки в банку и равномерно размешивая содержимое получить хоть в одной из банок колер, в котором все 7 красок смешаны в равной пропорции?

Задача 9. Опишите все клетки Шуберта в $Gr(2,4)$.

Задача 10. Пусть $\mathbb{k}$ — произвольное поле, и $B \subseteq GL_n(\mathbb{k})$ — множество верхнетреугольных обратимых матриц. Пусть $\sigma\colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ — биекция, и $A_\sigma \in GL_n(\mathbb{k})$ — матрица линейного отображения, заданного как $e_i \mapsto e_{\sigma(i)}$, где e_i — стандартный базис $\mathbb{k}^n$.

а) Опишите явно матрицу A_σ для любой биекции σ.

б) Докажите, что $GL_n(\mathbb{k}) = \sqcup_\sigma BA_\sigma B$, где $BA_\sigma B = \{xA_\sigma y \mid x, y \in B\}$. *Указание. Метод Гаусса.*

Задача 11. Для любых линейных операторов $F, G\colon V \to V$ докажите, что **а)** $\ker(F \circ G) \supseteq \ker(G)$ **б)** $\operatorname{im}(F \circ G) \subseteq \operatorname{im}(F)$, и приведите конечномерные примеры, где оба включения — строгие.

Задача 12. Пусть $A \in M_n(\mathbb{k})$. Рассмотрим гомоморфизм алгебр

$$ev_A\colon \mathbb{k}[x] \xrightarrow{f \mapsto f(A)} M_n(\mathbb{k}).$$

Пусть $\ker \operatorname{ev}_A$ порождено $\mu_A(x))$. Обозначим через $\mathbb{k}[A]$ образ $\operatorname{im} \operatorname{ev}_A$. Многочлен $\mu_A(X)$ называется *минимальным многочленом матрицы* A (и определён с точностью до умножения на элемент $\mathbb{k}^\times$).

а) Найдите матрицу $A \in M_2(\mathbb{Z}) \subseteq M_2(\mathbb{Q})$ с минимальным многочленом равным $x^2 - 2$. Докажите, что $\mathbb{Q}[A]$ — поле.

б) Найдите такую матрицу $A \in M_2(\mathbb{R})$, что $\mathbb{R}[A] \cong \mathbb{C}$. Явно опишите $\mathbb{R}[A]$.

в) Найдите минимальный многочлен матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$$

г) Докажите, что $\dim \mathbb{k}[A] \leqslant n$. Что можно сказать про степень минимального многочлена?

Задача 13. Пусть матрица A диагональна, причём все диагональные элементы A различны. Докажите, что любая матрица, коммутирующая с A, имеет вид $f(A)$, где $f \in \mathbb{k}[x]$ — произвольный многочлен.