НМУ, Алгебра-3
Листок 1. 04.09.2022

Задача 1.
Существует ли функтор $\mathcal{F} : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Ab}$, переводящий всякую группу G в её центр $Z(G)$?

Задача 2.

а) Докажите, что вложение $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ — эпиморфизм колец.

б) Постройте несчетное множество попарно неизоморфных колец R, для которых вложение $\mathbb{Z} \hookrightarrow R$ — эпиморфизм.

Задача 3.
Пусть C, B — категории и $\mathcal{T} : C \to B$ — строгий функтор. Докажите, что если $\mathcal{T}f$ — мономорфизм, то f также мономорфизм.

Задача 4.
Докажите, что эпиморфизмы в $\mathbf{Grp}$ — это в точности сюръективные гомоморфизмы.
Указание: Пусть $f : G \to H$ — эпиморфизм, $H' \subset H$ — его образ. Если её индекс больше 2, постройте перестановку в S_H, меняющую местами два нетривиальных класса смежности, а затем постройте два морфизма $H \to S_H$, нарушающих эпиморфность.

Задача 5.
Докажите, что все идемпотентные морфизмы в $\mathbf{Set}$ расщепимы.

Задача 6.
Пусть K — коммутативное кольцо. Опишите категорию $K \downarrow \mathbf{CRng}$ объектов под K.

Задача 7.
Докажите, что для всякой категории C естественные преобразования $I_C \to I_C$ тождественного функтора образуют коммутативный моноид и найдите его для $C = \mathbf{Grp}, \mathbf{Ab}$ и $\mathbf{Set}$.