НМУ, Алгебра-3
Листок 4. 09.10.2023

Задача 1.
Пусть $\mathcal{O}$ — дедекиндово кольцо, а $\mathfrak{p}$ — простой идеал в нём. Докажите, что $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ — кольцо главных идеалов.
Задача 2.
Пусть M — конечнопорожденный модуль без кручения над дедекиндовым кольцом $\mathcal{O}$. Докажите, что для любого простого идеала $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}$ локализованный модуль $M_{\mathfrak{p}}$ проективен над $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ и выведите отсюда, что M также проективен.
Задача 3.
Пусть $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — идеалы в дедекиндовом кольце $\mathcal{O}$. Докажите изоморфизм $\mathcal{O}$-модулей $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} \simeq \mathcal{O} \oplus \mathfrak{ab}$.
Задача 4.
Пусть поле K не является алгебраически замкнутым. Докажите, что всякое алгебраическое подмножество в $\mathbb{A}^n_K$ имеет вид $Z(f)$ для некоторого многочлена $f \in K[x_1, \dots, x_n]$.
Задача 5.
Пусть K — алгебраически замкнутое поле, а $f(x, y)$ — неприводимый многочлен степени 2. Докажите, что координатное кольцо коники $f(x, y) = 0$ изоморфно либо координатному кольцу прямой, либо координатному кольцу гиперболы $xy = 1$, причем эти кольца не изоморфны.
Задача 6.
Пусть A — коммутативное кольцо, а $Spec(A)$ — множество простых идеалов A. Объявим замкнутыми множества вида $\{\mathfrak{p} : I \subset \mathfrak{p}\}$, где I — идеал A.

а) Докажите, что определение выше задает топологию.

б) Докажите, что в этой топологии $Spec(A)$ компактен.