НМУ, Алгебра-3
Листок 5. 30.10.2023

Задача 1.
Пусть $\mathcal{O}$ — дедекиндово кольцо и M — проективный модуль над $\mathcal{O}$.

а) Докажите, что существуют число $n \geq 1$ и идеал $\mathfrak{a}$ такие, что $M \cong \mathcal{O}^{n-1} \oplus \mathfrak{a}$.

б) Постройте изоморфизм между $K_0(\mathcal{O})$ и $\mathbb{Z} \oplus Cl(\mathcal{O})$. Здесь $Cl(\mathcal{O}) = I(\mathcal{O})/P(\mathcal{O})$ где I — группа ненулевых дробных идеалов, а P — подгруппа главных идеалов в ней.

Задача 2.
Вычислите $K_0(\mathbb{Z}[\sqrt{-5}])$.
Задача 3.
Пусть F — поле, и $f(x_1, \ldots, x_n)$ — ненулевой полином. Докажите, что существуют натуральные $a_1, \ldots, a_{n-1}$ и $\lambda \in F^*$ такие, что $\lambda^{-1} f(x_1 + x_n^{a_1}, \ldots, x_{n-1} + x_n^{a_n}, x_n)$ приведен по переменной x_n.
Задача 4.
Пусть A — локальное целостное кольцо, в котором максимальный идеал $\mathfrak{m}$ главный и $\cap_n \mathfrak{m}^n = 0$. Докажите, что A — кольцо главных идеалов.
Задача 5.
Пусть S — координатное кольцо проективного пространства $\mathbb{CP}^n$ и $\mathfrak{a}$ — однородный идеал в нём. Докажите, что следующие условия эквивалентны

i) $Z(\mathfrak{a}) = \emptyset$.

ii) $\sqrt{\mathfrak{a}} = S$ или $\bigoplus_{d>0} S_d$.

iii) Существует $d > 0$ такое, что $S_d \subset \mathfrak{a}$.

Задача 6.
Пусть $Y = \{(t^3, t^4, t^5), t \in K\} \subset \mathbb{A}^3_K$. Докажите, что $I(Y)$ — простой идеал в $K[x, y, z]$ высоты 2, не порождающийся 2 элементами.