

НМУ, Алгебра-3  
Листок 6. 20.11.2023

*Задача 1.*

Пусть  $W$  — алгебра линейных операторов на  $\mathbb{C}[x]$ , порожденная  $f(x) \mapsto xf(x)$  и  $f(x) \mapsto f'(x)$ . Докажите, что  $W$  проста (не имеет нетривиальных двусторонних идеалов), но не полупроста.

*Задача 2.*

Пусть  $A$  — артиново кольцо. Мы доказали, что существуют не обязательно различные максимальные идеалы  $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_k$  такие, что  $\mathfrak{m}_1 \dots \mathfrak{m}_k = 0$ . Докажите, что все простые идеалы  $A$  максимальны и кольцо  $A$  нётерово.

*Задача 3.*

Докажите, что для любого артинова кольца  $A$  выполнено

$$A \cong \prod_{\mathfrak{p}} A_{\mathfrak{p}},$$

где произведение берется по всем простым идеалам в  $A$ .

*Задача 4.*

Пусть  $R$  — полупростое кольцо, у которого все простые левые идеалы изоморфны.

- а) Докажите, что если  $L$  и  $M$  — простые левые идеалы, то  $Lr = M$  для некоторого  $r \in R$ .
- б) Докажите, что в  $R$  нет двусторонних идеалов, отличных от  $R$  и  $0$ .

*Задача 5.*

Пусть  $A$  — центральная простая алгебра над полем  $K$ . Покажите, что  $A \otimes_K A^{op} \cong M_n(K)$  для некоторого  $n$ , где  $A^{op}$  — противоположная алгебра, то есть  $A$  с умножением  $a * b = ba$ .